PolyLog $\neq$ P

L'idée est de dire que **P** admet des problèmes **P**-complets (Horn-SAT par exemple), alors que **PolyLog** non. La preuve ci-dessous montre que **PolyLog** n'admet pas de problème **PolyLog**-complet.

Supposons par l'absurde que **PolyLog** admette un problème **PolyLog**-complet, noté A. Alors notamment :

$$\exists k \in \mathbb{N}, A \in \mathbf{SPACE}(\log^k(n))$$

Je veux démontrer que cette hypothèse absurde amène, pour $k' > k$, à

$$\mathbf{SPACE}(\log^{k'}(n)) = \mathbf{SPACE}(\log^k(n)).$$

Soit $B \in \mathbf{SPACE}(\log^{k'}(n))$. Notamment, comme A est **PolyLog**-complet, alors $B \preceq A$. Soit f la fonction de réduction associée, et soit g une fonction de résolution de A.

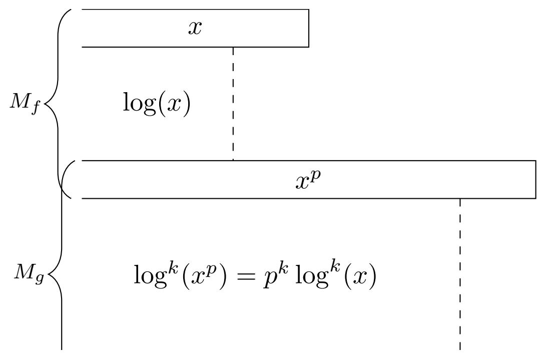

Illustration de la taille possible des entrées et de l'espace mémoire impliqué.
p est une constante.

Il existe une machine M_f calculant f telle que M_f utilise un espace mémoire logarithmique en son entrée, donc dont la sortie est au maximum polynomiale en son entrée. Il existe également une machine M_g calculant g et dont l'espace mémoire utilisé est en $\log^k(n)$ où n est la taille de l'entrée.

Il est possible de construire, à partir de M_g et M_f, une machine N qui calcule $g \circ f$ et utilise un espace en $\log^k(n)$.

$\square$

Le théorème suivant (admis) permet ensuite de conclure :

Théorème. *Si* $f = \circ(g)$, *alors* $\mathbf{SPACE}(f(n)) \subsetneq \mathbf{SPACE}(g(n))$

car il nous dit notamment que

$$\mathbf{SPACE}(\log^{k'}(n)) \neq \mathbf{SPACE}(\log^k(n)),$$

contrairement à ce qui vient d'être prouvé.