TD 1
Langages Formels

Luc Lapointe
luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Exercice 1 – Dyck à n paires de parenthèses

Soit $\Sigma = \{a_1, \cdots, a_n\} \cup \{b_1, \cdots, b_n\}$ l'alphabet formé de n paires de parenthèses. Un mot est bien parenthésé s'il se réduit au mot vide via les règles,
pour tout $i \in [1, n]$, $a_i b_i \to \varepsilon$.

Donner une grammaire engendrant le langage de Dyck

$$D_n^\star = \{w \in \Sigma^\star \mid w \text{ est bien parenthésé}\}.$$

Exercice 2 – Exemples d'automates à pile

1. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{u\tilde{u} : u \in \Sigma^\star\}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage de Dyck D_n^*.
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_2 = \{w \in \Sigma^* : |w|_a = 2|w|_b\}$.
4. Construire un automate à pile reconnaissant par pile vide le langage $L_3 = \{a^n b^p : 1 \leq n \leq p \leq 2n\}$.

Exercice 3 – Langage linéaire et automates à pic

Un automate à un pic est un automate à pile tel que dans tout calcul valide, la taille de la pile n'augmente plus une fois qu'elle a diminué. La taille de la pile peut donc augmenter (au sens large) pendant une première partie du calcul, puis elle ne fait que diminuer (au sens large). Un langage est à un pic s'il peut être accepté par pile vide par un automate à un pic.

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 1\}$ est un langage à un pic.
2. Montrer que le langage $K = \left\{b a^{i_1} b a^{i_2} b \cdots b a^{i_n} b \mid n \geq 1 \text{ et } \exists j, i_j \neq j\right\}$ est un langage à un pic.
3. Montrer que tout langage linéaire est un langage à un pic.

Exercice 4 – Unique symbole de pile

On s'intéresse ici à des automates dont l'alphabet de pile Γ est un singleton $\{z\}$.

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^m c : 1 \leq m \leq n\}$ peut être accepté par pile vide et état final par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.
2. Montrer que le langage L ne peut pas être accepté par pile vide par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.

Contrôle continu – Exemples d'automates à pile

Construire un automate à pile reconnaissant les langages suivants. Inutile de donner de preuve, une phrase par état pour expliquer leur rôle dans l'automate suffit.

1. $$L_1 = \{a^i b^j c^k : i + j = k\}$$
2. $$L_2 = \{a^i b^j c^k : i + k = j\}$$
3. Le langage des palindromes $\{u \in \Sigma^\star : \tilde{u} = u\}$ où $\tilde{u}$ est l'image miroir de u.