

TD 2 Calculabilité

Luc Lapointe

luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Exercice 1 - Palindromes sur 2 rubans

Montrer qu'il existe une machine de Turing sur 2 rubans qui reconnaît le langage des palindromes en temps linéaire.

Comparer au temps que met une machine à 1 ruban.

Exercice 2 - Clôtures

1. Montrer que la classe des langages rékursifs est close par intersection, union et complémentaire.
2. Montrer que la classe des langages rékursivement énumérables est close par intersection et union.
3. Montrer que la classe des langages rékursivement énumérables n'est pas close par complémentaire.

Exercice 3 - Fonctions calculables et langages rékursivement énumérables

1. Soit f une fonction calculable. Montrer que l'image de f est un langage rékursivement énumérable.
2. Montrer que l'image d'une fonction quelconque n'est pas forcément un langage rékursivement énumérable.

Exercice 4 - Image de langages rékursivement énumérables

1. Soit f une fonction calculable. Montrer que si L est rékursivement énumérable, alors $f(L)$ aussi.
2. Montrer que l'implication devient fausse avec L quelconque ou f quelconque.

Exercice 5 - MTF

Une machine de Turing avec états finaux (MTF) est presque comme une machine de Turing du cours, mais il n'y a pas d'état acceptant ou rejetant.

Un mot en entrée est *accepté* s'il existe un calcul qui termine dans un état final, et *rejeté* sinon. Un langage est *MTF-semi-décidable* s'il existe une MTF qui accepte exactement ses mots. Si en plus cette MTF ne permet de calcul infini sur aucune entrée, le langage est *MTF-décidable*.

La fonction associée à une MTF a pour *domaine* le langage reconnu et pour *valeur* le plus grand préfixe sans blanc sur le ruban au moment de l'arrêt. Cette fonction est dite *MTF-semi-calculable*. Si son domaine est MTF-décidable, elle est dite *MTF-calculable*.

Montrer les propriétés suivantes :

1. Un langage est semi-décidable ssi il est MTF-semi-décidable.
2. Un langage est décidable ssi il est MTF-décidable.
3. Une fonction est semi-calculable ssi elle est MTF-semi-calculable.
4. Une fonction est calculable ssi elle est MTF-calculable.