

Corrigé TD 3 Complexité

Luc Lapointe

luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Vous pouvez reprendre les exercices du TD précédent si vous le souhaitez.

La classe coNP Soit une classe $\mathcal{C}$ de problèmes de décision. La classe $\text{co}\mathcal{C}$ correspond à l'ensemble des langages L tels que $\bar{L} \in \mathcal{C}$.

Exercice 1 – Clôture

Supposons que le langage L soit complet pour la classe $\mathcal{C}$. Exhiber un langage complet pour la classe $\text{co}\mathcal{C}$.

Idée de solution

Considérons L^c le complémentaire de L . C'est, par définition, un langage qui est dans $\text{co}\mathcal{C}$. Montrons qu'il est $\text{co}\mathcal{C}$ -dur.

Soit K un langage dans $\text{co}\mathcal{C}$. Alors K^c est un langage dans $\mathcal{C}$, donc il existe une réduction de K^c vers L . En conséquence, la même fonction est une réduction de K vers L^c .

Exercice 2 – Tautologie

Prouver que le problème de décision Tautologie suivant est coNP -complet :

Entrée: Une formule propositionnelle φ sous forme normale disjonctive.

Question: Est-ce que toute valuation satisfait φ ?

Idée de solution

Le problème complémentaire est le suivant :

Entrée: Une formule propositionnelle φ sous forme normale disjonctive.

Question: Est-ce qu'il existe une valuation qui ne satisfait pas φ ?

C'est un problème irréductible avec SAT, en prenant la négation de la formule. D'où la NP-complétude : un sens de la réduction donne que le problème est dans NP, l'autre qu'il est NP-dur.

Exercice 3 – Changement de format

1. Le problème SAT reste-t-il NP-complet si la formule est en forme normale disjonctive (au lieu de conjonctive) ?
2. Le problème Tautologie reste-t-il coNP-complet si la formule est en forme normale conjonctive (au lieu de disjonctive) ?

Idee de solution

1. cf TD précédent.
2. Irréductible avec SAT en FND, donc non.

Exercice 4 – Combien de patates

Un problème coNP est-il, a priori, dans NP ?

Idee de solution

Non. L'égalité de NP et coNP est un problème ouvert. Il est conjecturé que ces classes sont différentes.

Problèmes NP-complets sur les graphes

Note : les trois problèmes qui suivent sont des problèmes d'optimisation qui ont été transformés en problème de décision, via l'ajout d'un seuil m .

Exercice 5 – Ensemble indépendant

Un *ensemble indépendant* dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble $C \subseteq S$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G , c'est à dire que $u, v \in C$ implique $uv \notin A$. Démontrer que le langage INDEPENDANT SET défini comme suit est NP-complet :

Entrée: Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un entier $m \in \mathbb{N}$

Question: G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m ?

Idée de solution

Facilement dans NP.

Pour la NP-difficulté, réduction depuis 3-SAT. L'idée va être de représenter les valuations possibles des variables avec des sommets, et les arêtes vont représenter des incompatibilités.

Soit φ une entrée de 3-SAT, avec k clauses, et des variables étiquetées $x_1, \dots, x_n$. On considère comme entier en entrée de INDEPENDANT SET l'entier k . Pour le graphe, on considère un ensemble de sommets comportant autant de sommets que de littéraux présents dans la formule, avec répétitions. Plus précisément, si la clause i est $l_a \vee l_b \vee l_c$, alors le graphe aura des sommets l_a^i, l_b^i, l_c^i . Pour les arêtes :

- Une arête tous les littéraux au sein d'une même clause. Les 3-clause forment donc des triangles.
- Pour tout j , une arête entre toutes les copies de x_j et toutes les copies de $\neg x_j$.

Cette réduction peut se faire en espace logarithmique : il suffit de construire le graphe au fur et à mesure que la formule est lue. Deux compteurs suffisent pour construire les arêtes entre les x_j et $\neg x_j$, le reste peut se faire sans mémoire.

Cette réduction conserve les solutions : si φ est satisfiable, alors chaque valuation qui la satisfait donne au moins un ensemble indépendant de taille k , en considérant pour chaque clause un sommet dans le graphe qui est le pendant d'un littéral satisfait dans la formule. Réciproquement, si le graphe a un ensemble indépendant E de taille k , alors du fait des triangles il y a au plus un sommet de

E dans chaque groupe de sommets qui correspond à une clause - donc exactement k , car il y a k tels groupes. Un tel ensemble ne comprend par ailleurs jamais une variable et sa négation. On peut donc en déduire une valuation, qui s'avère satisfaire φ .

Exercice 6 – Recouvrement

Un *recouvrement* C d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble $C \subseteq S$ de sommets tel que toute arête de A est incidente à C , c'est à dire à au moins un élément de C . Démontrer que le langage VERTEX COVER défini comme suit est NP-complet :

Entrée: Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un entier $m \in \mathbb{N}$

Question: G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Idée de solution

Facilement dans NP.

Pour la NP-difficulté, réduction depuis INDEPENDANT SET. On commence par prouver que dans un graphe $G = (S, A)$, E est un ensemble indépendant si et seulement si son complémentaire est un recouvrement.

E est un ensemble indépendant de G ssi pour $x, y \in E$, il n'y a pas d'arête entre x et y ssi pour toute arête xy , soit x soit y est dans E^c ssi E^c est un recouvrement.

La réduction est ensuite simple : pour G un graphe comportant n sommet, il suffit de conserver G et remplacer m par $n - m$.

Exercice 7 – Clique

Une *clique* C d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble $C \subseteq S$ de sommets induisant un sous-graphe complet de G , c'est à dire tel que pour $u \neq v \in C$ on a $uv \in A$. Démontrer que le langage VERTEX COVER défini comme suit est NP-complet :

Entrée: Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un entier $m \in \mathbb{N}$

Question: G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Idée de solution

Facilement dans NP.

Pour la NP-difficulté, réduction depuis VERTEX COVER. Pour G un graphe, on note G^c son *graphe complémentaire* défini comme comportant les mêmes sommets, et où il y a une arête entre x et y dans G si et seulement si il n'y en a pas entre x et y dans G^c .

On commence par prouver que dans un graphe $G = (S, A)$, E est une clique si et seulement si son complémentaire est un recouvrement dans le graphe complémentaire de G .

E est une clique de G ssi pour $x, y \in E$, il y a une arête entre x et y dans G ssi pour $x, y \in E^c$, il n'y a pas d'arête entre x et y dans G^c ssi pour toute arête xy dans G^c , soit x soit y est dans E^c ssi E^c est un recouvrement dans G^c .

La réduction consiste ensuite à recopier m , et à inverser les arêtes dans G . Ceci peut se faire en espace logarithmique quel que soit l'encodage de G .

Exercice 8 – 3-Coloration

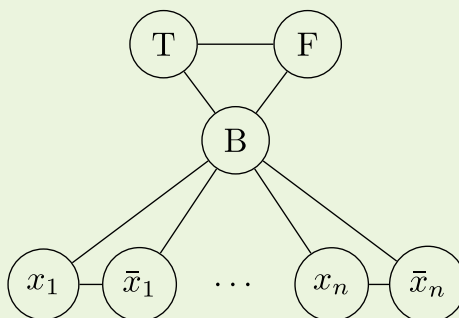
Prouver que le problème 3-COLORATION est NP-complet. Pour prouver la NP-dureté de ce problème, on pourra effectuer une réduction depuis le problème 3-SAT, également NP-complet.

Idée de solution

Facilement dans NP.

Pour la NP-difficulté, réduction depuis 3-SAT. Soit φ une formule en 3-FNC. On commence par faire une base de graphe avec :

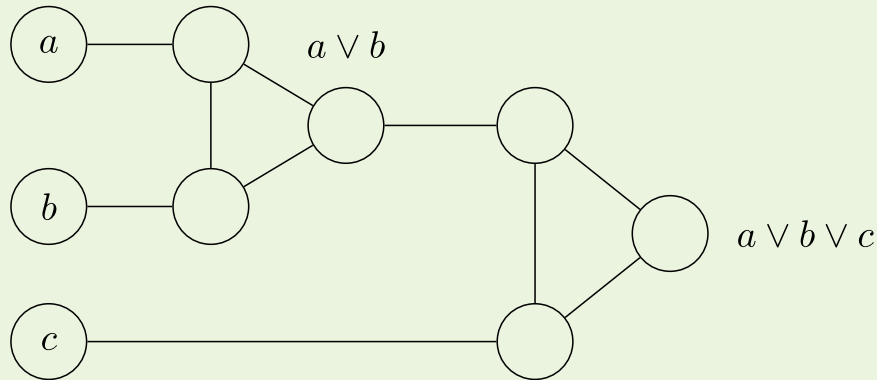
- Pour chaque variable, un sommet avec et un sommet sans négation,
- Trois sommets B, F, V pour Base, Faux, Vrai, connectés en triangle,
- Le sommet B est connecté à chaque sommet de variable, et chaque variable est connectée à sa négation.



Dans l'idée, la couleur des sommets F et V correspondra à une valeur de vérité d'une variable.

Ensuite, pour chaque clause, on rajoute un gadget comme ci-dessous :

- Un triangle dont un sommet est relié à la première variable a de la clause, et le deuxième à une autre variable b .
- Un autre triangle dont un sommet est relié au troisième sommet du premier triangle, et un autre à la troisième variable c de la clause.



Dans l'idée, le troisième du premier triangle sera nécessairement affecté à la couleur de faux si a et b sont fausses. Par contre, si une des deux est vraie, *il existe* une coloration qui colore comme vrai le troisième sommet. Ainsi, le troisième sommet du premier triangle décrit la valeur de vérité de $a \vee b$. De même, le troisième sommet du deuxième triangle décrit la valeur de vérité de $a \vee b \vee c$.

Ensuite, il suffit de relier le troisième sommet du deuxième triangle à B et F.