

TD2

Calculabilité

Luc Lapointe
lapointe@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 Palindromes sur 2 rubans

Montrer qu'il existe une machine de Turing sur 2 rubans qui reconnaît le langage des palindromes en temps linéaire.

Comparer au temps que met une machine à 1 ruban.

Exercice 2 Clôtures

- Montrer que la classe des langages rékursifs est close par intersection, union et complémentaire.
- Montrer que la classe des langages rékursivement énumérables est close par intersection et union.
- Montrer que la classe des langages rékursivement énumérables n'est pas close par complémentaire.

Exercice 3 Fonctions calculables et langages rékursivement énumérables

Soit f une fonction calculable. Montrer que l'image de f est un langage rékursivement énumérable.

Montrer que l'image d'une fonction quelconque n'est pas forcément un langage rékursivement énumérable.

Exercice 4 Image de langages rékursivement énumérables

Soit f une fonction calculable. Montrer que si L est rékursivement énumérable, alors $f(L)$ aussi.

Montrer que l'implication devient fausse avec L quelconque ou f quelconque.

Exercice 5 MTF

Une machine de Turing avec états finaux (MTF) est presque comme une MT du cours, mais il n'y a pas d'état acceptant ou rejetant. Un mot en entrée est accepté s'il existe un calcul qui termine dans un état final, et rejeté sinon. Un langage est MTF-semi-décidable s'il existe une MTF qui accepte exactement ses mots. Si en plus cette MTF ne permet de calcul infini sur aucune entrée, le langage est MTF-décidable. La fonction associée à une MTF a pour domaine le langage reconnu et pour valeur le plus grand préfixe sans blanc sur le ruban au moment de l'arrêt. Cette fonction est dite MTF-semi-calculable. Si son domaine est MTF-décidable, elle est dite MTF-calculable.

- Un langage est semi-décidable ssi il est MTF-semi-décidable.
- Un langage est décidable ssi il est MTF-décidable.
- Une fonction est semi-calculable ssi elle est MTF-semi-calculable.
- Une fonction est calculable ssi elle est MTF-calculable.