TD 3
Calculabilité

Luc Lapointe
luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Exercice 1 - Diagonalisations

Montrer par un argument diagonal (et donc sans réduction) que les langages suivants sont indécidables :

$$L_{\text{accepte}} = \left\{ (\langle M \rangle, w)^{\text{bin}} \mid M \text{ accepte } w \right\}$$

$$L_{\text{arrêt}} = \left\{ (\langle M \rangle, w)^{\text{bin}} \mid M \text{ termine avec l'entrée } w \right\}$$

Exercice 2 - Vers la réduction (1)

En supposant que le langage $L_{\text{arrêt}}$ est indécidable (et seulement celui-ci), montrez que

$$L_{\emptyset} = \{ \langle M \rangle^{\text{bin}} \mid \mathcal{L}(M) = \emptyset \}$$

l'est également. Vous raisonnerez par l'absurde et supposerez l'existence d'une machine de Turing $M_{\emptyset}$ décidant $L_{\emptyset}$. Vous construirez ensuite une machine M décidant $L_{\text{arrêt}}$ en utilisant $M_{\emptyset}$.

Exercice 3 - Vers la réduction (2)

En supposant que le langage L_{accepte} est indécidable (et seulement celui-ci), montrez que

$$L_{\text{arrêt}}$$

l'est également. Vous raisonnerez par l'absurde et supposerez l'existence d'une machine de Turing $M_{\text{arrêt}}$ décidant $L_{\text{arrêt}}$. Vous construirez ensuite une machine M décidant L_{accepte} en utilisant $M_{\text{arrêt}}$.

Les preuves des exercices 2 et 3 ont toutes un point commun expliqué ci-dessous. On dit que ce sont des preuves **par réduction**.

Rappel (ou non) : Soit Σ un alphabet. Un *problème* A sur Σ est un langage sur Σ. Les mots de $\mathcal{A}$ sont les *instances acceptantes* du problème, et les mots de Σ^* sont les *instances* du problème.

Si on considère deux problèmes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, on dit que

$$\mathcal{A} \text{ se réduit à } \mathcal{B} \text{ (noté } \mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}\text{)}$$

si on peut exhiber une fonction **calculable** f qui **pour toute** instance a de $\mathcal{A}$, renvoie une instance $b = f(a)$ de $\mathcal{B}$ telle que

a est une instance acceptante de $\mathcal{A}$
si et seulement si
b est une instance acceptante de $\mathcal{B}$.

Attention ! Il n'est pas nécessaire que **toutes** les instances de $\mathcal{B}$ soient dans l'image de f.

Si on a $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$ alors :
- si $\mathcal{A}$ est indécidable, alors $\mathcal{B}$ aussi;
- si $\mathcal{B}$ est décidable, alors $\mathcal{A}$ aussi.

Exercice 4 - Est-ce décidable ?

Dire si les problèmes suivants sont décidables ou non. Si c'est le cas, donner l'idée de la machine de Turing décidant le langage, et si non, faire une preuve **par réduction**.

1. **Donnée :** le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : M s'arrête-t-elle sur le mot vide ?
2. **Donnée :** le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : M s'arrête-t-elle sur au moins une donnée ?
3. **Donnée :** les codes $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ et $\langle M' \rangle^{\text{bin}}$ de deux machines de Turing.
   Question : $L(M) = L(M')$?
4. **Donnée :** les codes $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing et d'un mot w et un entier n en base 2.
   Question : M accepte-t-elle w après au plus n transitions ?
5. **Donnée :** le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : M termine-t-elle en temps polynomial ?
6. **Donnée :** les codes $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing et le code $\langle M' \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing qui s'arrête pour tout mot w en au plus $2.|w|$ transitions.
   Question : Pour tout mot w, $M(w) = M'(w)$?