TD 3
Complexité

Luc Lapointe
luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Vous pouvez reprendre les exercices du TD précédent si vous le souhaitez.

La classe coNP Soit une classe $\mathcal{C}$ de problèmes de décision. La classe co$\mathcal{C}$ correspond à l'ensemble des langages L tels que $\overline{L} \in \mathcal{C}$.

Exercice 1 – Clôture

Supposons que le langage L soit complet pour la classe $\mathcal{C}$. Exhiber un langage complet pour la classe co$\mathcal{C}$.

Exercice 2 – Tautologie

Prouver que le problème de décision Tautologie suivant est coNP-complet :

Entrée: Une formule propositionnelle φ sous forme normale disjonctive.
Question: Est-ce que toute valuation satisfait φ ?

Exercice 3 – Changement de format

1. Le problème SAT reste-t-il NP-complet si la formule est en forme normale disjonctive (au lieu de conjonctive) ?
2. Le problème Tautologie reste-t-il coNP-complet si la formule est en forme normale conjonctive (au lieu de disjonctive) ?

Exercice 4 – Combien de patates

Un problème coNP est-il, a priori, dans NP ?

Problèmes NP-complets sur les graphes

Note : les trois problèmes qui suivent sont des problèmes d'optimisation qui ont été transformés en problème de décision, via l'ajout d'un seuil m.

Exercice 5 – Ensemble indépendant

Un *ensemble indépendant* dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble $C \subseteq S$ de sommets dont aucun n'est relié à aucun autre par une arête de G, c'est à dire que $u, v \in C$ implique $uv \notin A$. Démontrer que le langage Independant Set défini comme suit est NP-complet :

Entrée: Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un entier $m \in \mathbb{N}$
Question: G a-t-il un ensemble indépendant de cardinal au moins m ?

Exercice 6 – Recouvrement

Un *recouvrement* C d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble $C \subseteq S$ de sommets tel que toute arête de A est incidente à C, c'est à dire à au moins un élément de C. Démontrer que le langage Vertex Cover défini comme suit est NP-complet :

Entrée: Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un entier $m \in \mathbb{N}$
Question: G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Exercice 7 – Clique

Une *clique* C d'un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble $C \subseteq S$ de sommets induisant un sous-graphe complet de G, c'est à dire tel que pour $u \neq v \in C$ on a $uv \in A$. Démontrer que le langage Vertex Cover défini comme suit est NP-complet :

Entrée: Un graphe non orienté $G = (S, A)$, un entier $m \in \mathbb{N}$
Question: G a-t-il un recouvrement de cardinal au plus m ?

Exercice 8 – 3-Coloration

Prouver que le problème 3-Coloration est NP-complet. Pour prouver la NP-dureté de ce problème, on pourra effectuer une réduction depuis le problème 3-SAT, également NP-complet.