

TD 3

Calculabilité

Luc Lapointe
lapointe@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 Diagonalisations

Montrer par un argument diagonal (et donc sans réduction) que les langages suivants sont indécidables :

- $L_{\text{accepte}} = \{(\langle M \rangle, w)^{\text{bin}} \mid M \text{ accepte } w\}$,
- $L_{\text{arret}} = \{(\langle M \rangle, w)^{\text{bin}} \mid M \text{ termine avec l'entrée } w\}$

Exercice 2 Vers la réduction (1)

En supposant que le langage L_{arret} est indécidable (et seulement celui-ci), montrez que

$$L_{\emptyset} = \{\langle M \rangle^{\text{bin}} \mid \mathcal{L}(M) = \emptyset\}$$

l'est également. Vous raisonnerez par l'absurde et supposerez l'existence d'une machine de Turing M_{\emptyset} décidant L_{\emptyset} . Vous construirez ensuite une machine M décidant L_{arret} en utilisant M_{\emptyset} .

Exercice 3 Vers la réduction (2)

En supposant que le langage L_{accepte} est indécidable (et seulement celui-ci), montrez que

$$L_{\text{arret}}$$

l'est également. Vous raisonnerez par l'absurde et supposerez l'existence d'une machine de Turing M_{arret} décidant L_{arret} . Vous construirez ensuite une machine M décidant L_{accepte} en utilisant M_{arret} .

★
★ ★

Les preuves des exercices 2 et 3 ont toutes un point commun expliqué ci-dessous. On dit que ce sont des preuves **par réduction**.

Rappel (ou non) : Soit Σ un alphabet. Un *problème* \mathfrak{A} sur Σ est un langage sur Σ . Les mots de \mathfrak{A} sont les *instances acceptantes* du problème, et les mots de Σ^* sont les *instances* du problème.

Si on considère deux problèmes \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , on dit que

\mathfrak{A} se réduit à \mathfrak{B} (noté $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$)

si on peut exhiber une fonction **calculable** f qui **pour toute** instance a de \mathfrak{A} , renvoie une instance $b = f(a)$ de \mathfrak{B} telle que

a est une instance acceptante de \mathfrak{A}
si et seulement si
b est une instance acceptante de \mathfrak{B} .

Attention! Il n'est pas nécessaire que **toutes** les instances de \mathfrak{B} soient dans l'image de f .

Si on a $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$, alors :

- si \mathfrak{A} est indécidable, alors \mathfrak{B} est indécidable ;
- si \mathfrak{B} est décidable, alors \mathfrak{A} est décidable.

*
* *

Exercice 4 Est-ce décidable ?

Dire si les problèmes suivants sont décidables ou non. Si c'est le cas, donnez l'idée de la machine de Turing décidant le langage, et si non, faites une preuve **par réduction**.

1. **Donnée :** le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing
Question : M s'arrête-t-elle sur le mot vide ?
2. **Donnée :** le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing
Question : M s'arrête-t-elle sur au moins une donnée ?
3. **Donnée :** les codes $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ et $\langle M' \rangle^{\text{bin}}$ de deux machines de Turing
Question : $L(M) = L(M')$?
4. **Donnée :** le code $(\langle M \rangle, w)^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing et d'un mot w et un entier n (en base 2)
Question : M accepte-t-elle w après au plus n transitions ?
5. **Donnée :** le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing
Question : M calcule en temps polynomial (i.e. M termine en temps polynomial) ?
6. **Donnée :** les codes $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing et le code $\langle M' \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing qui s'arrête pour tout mot w en au plus $2 \cdot |w|$ transitions
Question : Pour tout mot w , $M(w) = M'(w)$?

Exercice 5 Automates linéairement bornés

Un *automate linéairement borné* est une machine de Turing qui lorsqu'elle lit un blanc, écrit un blanc et se déplace vers la gauche.

1. Montrer que le problème de l'arrêt des automates linéairement bornés est décidable.
2. Montrer que le problème de l'arrêt universel des automates linéairement bornés est indécidable :
Donnée : $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ où M est un automate linéairement borné
Question : est ce que M s'arrête sur toute donnée ?