

## TD 4 Langages Formels

Luc Lapointe  
luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr  
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

### Exercice 1

Soit  $\mathcal{L}$  un langage régulier. Montrer que  $\{u\tilde{v} \mid uv \in \mathcal{L}, u \neq v\}$  est algébrique, où  $\tilde{v}$  est le mot miroir de  $v$ .

### Exercice 2 – Parenthèses retournées

Soit  $D_n$  le langage de Dyck à  $n$  paires de parenthèses. Les langages suivants sont-ils algébriques ?

- $\{u\tilde{v} : uv \in D_1\}$
- $\{u\tilde{v} : uv \in D_2\}$

### Exercice 3 – Distance de Hamming

La distance de Hamming entre deux mots de même longueur est le nombre de positions où les mots diffèrent (ex: *abac* et *abba* ont une distance de 2). Pour tout langage régulier  $\mathcal{L}$ , montrez que le langage des mots  $v$  à distance au plus  $|v|/2$  d'un mot de longueur  $|v|$  de  $\mathcal{L}$  est algébrique. Montrez qu'il n'est pas toujours régulier.

### Exercice 4 – (★) Théorème de Parikh

Soit  $\Sigma = a_1, \dots, a_n$ . L'image d'un mot  $w$  est le tuple  $|w|_{a_1}, \dots, |w|_{a_n} \in \mathbb{N}^n$ . L'image d'un langage est l'ensemble des images de ses mots. Montrer que pour tout langage algébrique, il existe un langage régulier avec la même image.

### Contrôle continu

*N'hésitez pas à réfléchir à cet exercice à plusieurs, du moment que vous rédigez uniquement des choses que vous comprenez, et avec vos propres mots.*

Soit  $\mathcal{L}$  un langage algébrique tel que pour toute paire de mots de  $\mathcal{L}$ , l'un est préfixe de l'autre. Le but de cet exercice est de montrer que  $\mathcal{L}$  est régulier.

1. Montrer que  $\mathcal{L}$  ne peut pas contenir plusieurs mots différents de même taille.
2. Grâce au lemme de pompage, montrer que  $\mathcal{L}$  est inclus dans un langage de la forme  $\{xy^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  où  $x$  et  $y$  sont des mots.
3. Montrer que  $\mathcal{L}$  est l'intersection de deux langages réguliers, inspirés des deux questions précédentes.