TD 4
Calculabilité

Luc Lapointe
luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Exercice 1 - Reprise du TD précédent

Dire si les problèmes suivants sont décidables ou non. Si c'est le cas, donner l'idée de la machine de Turing décidant le langage, et si non, faire une preuve **par réduction**.

1. **Donnée :** Le code $\langle M\rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : M s'arrête-t-elle sur le mot vide ?
2. **Donnée :** Le code $\langle M\rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : M s'arrête-t-elle sur au moins une donnée ?
3. **Donnée :** Les codes $\langle M\rangle^{\text{bin}}$ et $\langle M'\rangle^{\text{bin}}$ de deux machines de Turing.
   Question : $L(M) = L(M')$?
4. **Donnée :** Les codes $\langle M\rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing et d'un mot w et un entier n en base 2.
   Question : M accepte-t-elle w après au plus n transitions ?
5. **Donnée :** Le code $\langle M\rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing
   Question : Est-ce qu'il existe un polynôme p tel que pour tout mot w, M termine en moins de $p(|w|)$ étapes sur w ?

Exercice 2 - Théorème de Rice : subtilités

1. Trouver une propriété non triviale $\mathcal{P}$ telle que le problème suivant est décidable:
   Donnée : Le code $\langle M\rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : $\langle M\rangle^{\text{bin}} \in \mathcal{P}$?
2. On considère les énoncés suivants en français:

   Si $\mathcal{P}$ est une propriété non triviale des langages récursifs,
   alors $\mathcal{P}$ est indécidable.

   Si $\mathcal{P}$ est une propriété non triviale des langages,
   alors $\mathcal{P}$ est indécidable.

   Pour chacun :
   - Essayer de le formaliser.
   - Prouver, ou faire mentir, l'énoncé formalisé.

Exercice 3 - Théorème de Rice : applications, non applications

Dire si les problèmes suivants sont décidables ou non. On se forcera à utiliser le théorème de Rice lorsque c'est possible.

1. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : Est-ce que $\mathcal{L}(M) = \emptyset$?
2. w est un mot fixé.
   Donnée : Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : Est-ce que M s'arrête sur w ?
3. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : Est-ce que la tête de lecture passe sur \$ lors du calcul de M sur ε ?
4. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : Est-ce que le complémentaire de $L(m)$ est récursivement énumérable ?
5. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : Existe-t-il deux mots w_1, w_2 de même longueur tels que $w_1, w_2 \in \mathcal{L}(M)$?
6. **Donnée :** Le code de deux machines de Turing $\langle M_1 \rangle^{\text{bin}}$ et $\langle M_2 \rangle^{\text{bin}}$
   Question : $\mathcal{L}(M_1) \cap \mathcal{L}(M_2) = \emptyset$?
7. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
   Question : Est-ce que $\mathcal{L}(M) = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ est pair}\}$?