

TD 4

Calculabilité

Luc Lapointe
lapointe@lmf.cnrs.fr

À rendre à la fin de ce TD, rédigé aussi proprement que possible :

- Une preuve de décidabilité issue de l'exercice 0,
- Une preuve d'indécidabilité issue de l'exercice 0 utilisant une réduction,
- Une preuve d'indécidabilité issue de l'exercice 2 utilisant le théorème de Rice.

Exercice 1 Théorème de Rice : subtilités

1. Trouver une propriété non triviale \mathcal{P} telle que le problème suivant est décidable :
Donnée : Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
Question : $\langle M \rangle^{\text{bin}} \in \mathcal{P}$?
2. Formaliser comme ci-dessus le problème de vérification d'une propriété des langages récursifs.
3. Existe-t-il une propriété indécidable des langages récursifs qui est une propriété décidable des langages récursivement énumérables ?
4. Existe-t-il une propriété indécidable des langages récursivement énumérables qui est une propriété décidable des langages récursifs ?

Exercice 0 Reprise du TD précédent

Dire si les problèmes suivants sont décidables ou non. Si c'est le cas, donnez l'idée de la machine de Turing décidant le langage, et si non, faites une preuve **par réduction**.

1. **Donnée** : le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing
Question : M s'arrête-t-elle sur le mot vide ?
2. **Donnée** : le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing
Question : M s'arrête-t-elle sur au moins une donnée ?
3. **Donnée** : les codes $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ et $\langle M' \rangle^{\text{bin}}$ de deux machines de Turing
Question : $L(M) = L(M')$?

4. **Donnée :** le code $\langle M, w \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing et d'un mot w et un entier n (en base 2)
Question : M accepte-t-elle w après au plus n transitions ?
5. **Donnée :** le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing
Question : M calcule en temps polynomial (i.e. M termine en temps polynomial) ?
6. **Donnée :** les codes $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing et le code $\langle M' \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing qui s'arrête pour tout mot w en au plus $2 \cdot |w|$ transitions
Question : Pour tout mot w , $M(w) = M'(w)$?

Exercice 2 Théorème de Rice : applications, non applications

Dire si les problèmes suivants sont décidables ou non. On se forcera à utiliser le théorème de Rice lorsque c'est possible.

1. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
Question : Est-ce que $L(M) = \emptyset$?
2. w est un mot fixé.
Donnée : Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
Question : Est-ce que M s'arrête sur w ?
3. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
Question : Est-ce que la tête de lecture passe sur $\$$ lors du calcul de M sur ε ?
4. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
Question : Est-ce que le complémentaire de $L(M)$ est récursivement énumérable ?
5. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
Question : Existe-t-il deux mots w_1, w_2 de même longueur tels que $w_1, w_2 \in L(M)$?
6. **Donnée :** Le code de deux machines de Turing $\langle M_1 \rangle^{\text{bin}}$ et $\langle M_2 \rangle^{\text{bin}}$.
Question : $L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset$?
7. **Donnée :** Le code de deux machines de Turing $\langle M_1 \rangle^{\text{bin}}$ et $\langle M_2 \rangle^{\text{bin}}$ qui calculent en temps polynomial.
Question : $L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset$?
8. **Donnée :** Le code $\langle M \rangle^{\text{bin}}$ d'une machine de Turing.
Question : Est-ce que $L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ est pair}\}$?