Corrigé TD 5
Calculabilité

Luc Lapointe
luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Exercice 1 - Variations sur PCP

1. Exhiber une instance positive ainsi qu'une instance négative de PCP.
2. Montrer que PCP est semi-décidable.
3. Est-ce que PCP est décidable lorsque tous les mots ont pour longueur exactement 2 ?
4. Est-ce que PCP est décidable lorsque tous les mots ont pour longueur au plus 2 ?

Solution

1. Instance positive : (a, a). Instance négative : (a, b).
2. Une machine de Turing non-déterministe peut deviner la suite de dominos qui génère deux mots identiques. La non-décidabilité pour les instances négatives provient du fait qu'il n'est pas possible de savoir quand s'arrêter de deviner des dominos.
3. Oui : il suffit de regarder si un domino contient le même mot en haut et en bas.
4. Non : cf ma page web.

Exercice 2 - Pavages du plan

Le problème du **pavage par tuiles** de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est défini par :

Donnée : Un ensemble fini $T = \{t_0, \ldots, t_k\}$ de *tuiles*, et deux sous-ensembles H, V de $T \times T$.
H et V représentent des relations de compatibilité horizontales et verticales.

Question : Existe-t-il une fonction de pavage $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto T$ telle que :

1. $f(0, 0) = t_0$
2. $\forall i, j \in \mathbb{N}, (f(i, j), f(i, j + 1)) \in H$
3. $\forall i, j \in \mathbb{N}, (f(i, j), f(i + 1, j)) \in V$

On définit maintenant un problème de **pavage par dominos**. On se donne un ensemble fini $C = \{W, P, R, G, B, \ldots\}$ de *couleurs*. Un *domino* est un quadruplet de couleurs $(c_L, c_T, c_R, c_B) \in C^4$. Étant donné un ensemble fini D de dominos et un domino distingué $d_0 \in D$, un *pavage* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par D est une application $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto D$ telle que :

1. $p(0, 0) = d_0$
2. Si $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, p(i, j) = \left(c_L^{i,j}, c_T^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j}\right)$ et $p(i, j + 1) = \left(c_L^{i,j+1}, c_T^{i,j+1}, c_R^{i,j+1}, c_B^{i,j+1}\right)$, alors $c_T^{i,j} = c_B^{i,j+1}$.
3. Si $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, p(i, j) = \left(c_L^{i,j}, c_T^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j}\right)$ et $p(i + 1, j) = \left(c_L^{i+1,j}, c_T^{i+1,j}, c_R^{i+1,j}, c_B^{i+1,j}\right)$, alors $c_R^{i,j} = c_L^{i+1,j}$.

Question 0 Trouver une représentation graphique pour chacun de ces problèmes.

Question 1 Décrire une instance positive ainsi qu'une instance négative pour chaque problème.

Question 2 Réduire le problème du pavage par dominos au problème du pavage par tuiles.

Question 3 Réduire le problème du pavage par tuiles au problème du pavage par dominos.

Une fois ces deux réductions établies, on a montré que ces deux problèmes sont *inter-réductibles*. Ils suffit donc de montrer qu'un des deux est (in)décidable pour montrer que l'autre l'est également.

Pour information : le problème de pavage par tuiles est indécidable. Une preuve consiste à simuler l'exécution d'une machine de Turing via un pavage.

Solution

cf ma page web.

Exercice 3 - Claviers

Exercice tiré de [1].

Soit A un alphabet, auquel on ajoute les symboles spéciaux suivants :

Le retour arrière $\leftarrow$ La flèche gauche $◀$ La flèche droite $▶$

On note $S = A \cup \{\leftarrow, ◀, ▶\}$ l'ensemble de tous les symboles possibles.

Nous appelons *configurations* les éléments de $A^* \times A^*$, et les notons $\langle u \mid v \rangle$. La barre du milieu représente un curseur.

L'*action* $\langle u \mid v \rangle \cdot s$ pour $s \in S$ est définie de la manière suivante :

$$\langle u \mid v \rangle \cdot a = \langle ua \mid v \rangle \text{ si } a \in A$$

$$\begin{array}{ll}
\langle \varepsilon \mid v \rangle \cdot \leftarrow = \langle \varepsilon \mid v \rangle & \langle u'a \mid v \rangle \cdot \leftarrow = \langle u' \mid v \rangle \\
\langle \varepsilon \mid v \rangle \cdot ◀ = \langle \varepsilon \mid v \rangle & \langle u'a \mid v \rangle \cdot ◀ = \langle u' \mid av \rangle \\
\langle u \mid \varepsilon \rangle \cdot ▶ = \langle u \mid \varepsilon \rangle & \langle u \mid av' \rangle \cdot ▶ = \langle ua \mid v' \rangle
\end{array}$$

Une *touche* est un élément de S^*, que nous pouvons voir comme une suite finie d'actions. L'ensemble des touches sur S est noté $\mathcal{T}(S)$.

Exemple : L'action de la touche $\leftarrow mi$ permet de passer de la configuration $\langle a \mid ne \rangle$ à $\langle mi \mid ne \rangle$.

Un *clavier automatique* K sur S est un sous-ensemble fini de $\mathcal{T}(S)$. w est *reconnu* par K s'il existe une suite finie non vide de touches de K menant de $\langle \varepsilon \mid \varepsilon \rangle$ à une configuration $\langle u \mid v \rangle$ où $uv = w$. On note $\mathcal{L}(K)$ l'ensemble des mots reconnus par K.

Exemple : Le clavier $K = \{aa\}$ reconnaît $\{(aa)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

On note GK l'ensemble des claviers construits sur $A \cup \{◀\}$.

Question 1 Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : Un clavier K de GK.

Question : K reconnaît-il au moins un palindrome de taille pair ?

Question 2 Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : Deux claviers K_1 et K_2 de GK.

Question : $\mathcal{L}(K_1) \cap \mathcal{L}(K_2) = \emptyset$?

Remarque Cela signifie notamment que GK capture une part raisonnablement bonne de l'expressivité des langages algébriques, puisque ce problème est décidable pour deux langages rationnels.

Solution

https://arxiv.org/abs/2102.10182 Preuve du théorème 117 et corollaire 118 pages 73-74.

Bibliographie

[1] Y. Géran, B. Laboureix, C. Mascle, et V. D. Richard, « Keyboards as a New Model of Computation », in *46th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2021)*, Dagstuhl, Germany: Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021, p. 1-20. doi: 10.4230/LIPIcs.MFCS.2021.49.