TD 5

Calculabilité

Luc Lapointe
lapointe@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 Variations sur PCP

1. Exhiber une instance positive ainsi qu'une instance négative de PCP.
2. Montrer que PCP est semi-décidable.
3. Est-ce que PCP est décidable lorsque tous les mots ont pour longueur exactement 2 ?
4. Est-ce que PCP est décidable lorsque tous les mots ont pour longueur au plus 2 ?

Exercice 2 Pavages du plan

Le problème du **pavage par tuiles** de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est défini par :

Donnée : Un ensemble fini $T = \{t_0, \ldots, t_k\}$ de *tuiles*,
et deux sous-ensembles H, V de $T \times T$.
H et V représentent des relations de compatibilité horizontales et verticales.

Question : Existe-t-il une fonction de pavage $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto T$ telle que :
1. $f(0,0) = t_0$
2. $\forall i, j \in \mathbb{N}, (f(i,j), f(i,j+1)) \in H$
3. $\forall i, j \in \mathbb{N}, (f(i,j), f(i+1,j)) \in V$

On définit maintenant un problème de **pavage par dominos**. On se donne un ensemble fini $C = \{W, P, R, G, B, \ldots\}$ de *couleurs*. Un *domino* est un quadruplet de couleurs $(c_L, c_T, c_R, c_B) \in C^4$. Étant donné un ensemble fini D de dominos et un domino distingué $d_0 \in D$, un *pavage* de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par D est une application de $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mapsto D$ telle que :

1. $p(0,0) = d_0$;
2. Si $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $p(i,j) = (c_L^{i,j}, c_T^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j})$, et $p(i,j+1) = (c_L^{i,j+1}, c_T^{i,j+1}, c_R^{i,j+1}, c_B^{i,j+1})$, alors $c_T^{i,j} = c_B^{i,j+1}$;
3. Si $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $p(i,j) = (c_L^{i,j}, c_T^{i,j}, c_R^{i,j}, c_B^{i,j})$, et $p(i+1,j) = (c_L^{i+1,j}, c_T^{i+1,j}, c_R^{i+1,j}, c_B^{i+1,j})$, alors $c_R^{i,j} = c_L^{i+1,j}$.

Question 0 Trouver une représentation graphique pour chacun de ces problèmes.

Question 1 Décrire une instance positive ainsi qu'une instance négative pour chaque problème.

Question 2 Réduire le problème du pavage par dominos au problème du pavage par tuiles.

Question 3 Réduire le problème du pavage par tuiles au problème du pavage par dominos.

Une fois ces deux réductions établies, on a montré que ces deux problèmes sont *inter-réductibles*. Il suffit donc de montrer qu'un des deux est (in)décidable pour montrer que l'autre l'est également.

Pour information : le problème de pavage par tuiles est indécidable. Une preuve consiste à simuler l'exécution d'une machine de Turing via un pavage.

Exercice 3 Claviers

Soit A un alphabet, auquel on rajoute les symboles spéciaux suivants :

le retour arrière $\leftarrow$ la flèche gauche $\blacktriangleleft$ la flèche droite $\blacktriangleright$

On note $S = A \cup \{\leftarrow, \blacktriangleleft, \blacktriangleright\}$ l'ensemble de tous les symboles possibles.

Nous appelons *configuration* les éléments de $A^* \times A^*$, et les notons $\langle u \,|\, v\rangle$. La barre du milieu représente un curseur.

L'*action* $\langle u \,|\, v\rangle \cdot s$ pour $s \in S$ est définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll}
\langle u \,|\, v\rangle \cdot a &= \langle ua \,|\, v\rangle & \textit{si} & a \in A \\
\langle \varepsilon \,|\, v\rangle \cdot \leftarrow &= \langle \varepsilon \,|\, v\rangle & \textit{et} & \langle u'a \,|\, v\rangle \cdot \leftarrow = \langle u' \,|\, v\rangle \\
\langle \varepsilon \,|\, v\rangle \cdot \blacktriangleleft &= \langle \varepsilon \,|\, v\rangle & \textit{et} & \langle u'a \,|\, v\rangle \cdot \blacktriangleleft = \langle u' \,|\, av\rangle \\
\langle u \,|\, \varepsilon\rangle \cdot \blacktriangleright &= \langle u \,|\, \varepsilon\rangle & \textit{et} & \langle u \,|\, av'\rangle \cdot \blacktriangleright = \langle ua \,|\, v'\rangle
\end{array}$$

Une *touche* est un élément de S^*, que nous pouvons voir comme une suite finie d'actions. L'ensemble des touches sur S est noté $\mathcal{T}(S)$.

Exemple : L'action de la touche $\leftarrow mi$ permet de passer de la configuration $\langle a \,|\, ne\rangle$ à $\langle mi \,|\, ne\rangle$.

Un *clavier automatique* K sur S est un sous-ensemble fini de $\mathcal{T}(S)$. w est *reconnu* par K s'il existe une suite finie de touches de K menant de $\langle \varepsilon \,|\, \varepsilon\rangle$ à une configuration $\langle u \,|\, v\rangle$ où $uv = w$. On note $\mathcal{L}(K)$ l'ensemble des mots reconnus par K.

Exemple : Le clavier $K = \{aa\}$ reconnaît $\{(aa)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

On note GK l'ensemble des claviers construits sur $A \cup \{\blacktriangleleft\}$.

Question 1 Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : Un clavier K de GK.
Question : K reconnaît-il au moins un palindrome de taille pair ?

Question 2 Montrer que le problème suivant est indécidable :

Donnée : Deux claviers K_1 et K_2 de GK.
Question : $\mathcal{L}(K_1) \cap \mathcal{L}(K_2) = \emptyset$?

Remarque Cela signifie notamment que GK capture une part raisonnablement bonne de l'expressivité des langages algébriques, puisque ce problème est décidable pour deux langages rationnels.

Référence

[G+21] Yoan Géran et al. "Keyboards as a New Model of Computation". In : *46th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS 2021)*. Dagstuhl, Germany : Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021, 49 :1-49 :20. DOI : 10.4230/LIPIcs.MFCS.2021.49. URL : https://drops.dagstuhl.de/opus/volltexte/2021/14489.