# TD 6

Calculabilité

Luc Lapointe
lapointe@lmf.cnrs.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

**Rappels**

L'ensemble des fonctions récursives primitives $RP$ est le plus petit ensemble de fonctions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ :

— contenant $0 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ telle que $() \mapsto 0$,
— contenant $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $n \mapsto 0$,
— contenant $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $n \mapsto n+1$,
— contenant les projections $P_k^i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ définies pour $1 \leq i \leq k$ comme

$$(n_1, \ldots, n_k) \mapsto n_i,$$

— stable par composition : si $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ sont récursives primitives, alors $Comp_m(f, g_1, \ldots, g_m)$ définie comme

$$\begin{aligned} &\mathbb{N}^k \to \mathbb{N} \\ &\vec{n} \mapsto f(g_1(\vec{n}), \ldots, g_m(\vec{n})) \end{aligned}$$

est récursive primitive.
— stable par récursion primitive : si $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ et $e : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ sont récursives primitives, alors

$$Prim(b, e) : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$$

définie comme suit est récursive primitive :
  — $Prim(\vec{m}, 0) := b(\vec{m})$
  — $Prim(\vec{m}, n+1) := e(\vec{m}, n, Prim(\vec{m}, n))$

## Exercice 1 Quelques fonctions récursives primitives rudimentaires

Montrer que si $b \in \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est récursive primitive, alors $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie comme suit est récursive primitive :

$$\begin{aligned} f(0) &= b \\ f(x+1) &= h(x, f(x)) \end{aligned}$$

En déduire que les fonctions suivantes sont récursives primitives, avec la convention que 0 correspond à *Faux* et que tout autre entier correspond à *Vrai*.

— La fonction factorielle,
— Les connecteurs logiques $\wedge, \vee, \neg$,
— La fonction prédécesseur.

### Exercice 2 Maximisation bornée

Soit $h$ une fonction récursive primitive. Une fonction $f$ est obtenue par schéma de *maximisation bornée* à partir de $h$ en étant définie par :

$f(\vec{x}, y) =$ le plus grand entier $t \leq y$ tel que $h(\vec{x}, t) = 0$ s'il existe un tel entier,
$f(\vec{x}, y) = 0$ sinon.

Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est stable par maximisation bornée.

On admet que les fonctions récursives primitives sont closes par schéma de *minimisation bornée* défini de manière similaire.

### Exercice 3 Paires

Montrer qu'il existe $J : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, et $K, L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

1. $J, K$ et $L$ sont récursives primitives,
2. $J$ est une bijection, et
3. on a $K(J(x, y)) = x$ et $L(J(x, y)) = y$ pour tout $x, y$.

### Exercice 4 Fibonacci

Montrer que la fonction définie comme suit est récursive primitive :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \\ f(n+2) &= f(n+1) + f(n) \end{aligned}$$

### Exercice 5 Caractérisation des fonctions RP par itération

Si $h$ est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on appelle *itération* de $h$ la fonction $f(n, x)$ définie par :

$$f(n, x) = \begin{cases} x & \text{si } n = 0 \\ h(f(n-1, x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la plus petite classe de fonctions sur les entiers qui contient les fonctions de base, les fonctions $J, K, L$ et qui est close par itération et composition, coïncide avec l'ensemble des fonctions récursives primitives.