TD 6
Calculabilité

Luc Lapointe
luc.lapointe@ens-paris-saclay.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Rappels

L'ensemble des fonctions récursives primitives RP est le plus petit ensemble de fonctions $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$:

- contenant $0 : \mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ telle que $() \mapsto 0$,
- contenant $Z : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $n \mapsto 0$,
- contenant $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $n \mapsto n+1$,
- contenant les projections $P_k^i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ définies pour $1 \leq i \leq k$ comme
$$(n_1, ..., n_k) \mapsto n_i,$$
- stable par composition : si $g_1, ..., g_m : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ sont récursives primitives, alors $\mathrm{Comp}_{m(f,g_1,...,g_m)}$ définie comme suit est récursive primitive.
$$\begin{aligned} \mathbb{N}^k &\to \mathbb{N} \\ \vec{n} &\mapsto f(g_1(\vec{n}), ..., g_m(\vec{n})) \end{aligned}$$
- stable par récursion primitive : si $b : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ et $e : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ sont récursives primitives, alors
$$\mathrm{Prim}(b, e) : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$$
définie comme suit est récursive primitive.
$$\begin{aligned} \mathrm{Prim}(\vec{m}, 0) &\coloneqq b(\vec{m}) \\ \mathrm{Prim}(\vec{m}, n+1) &\coloneqq e(\vec{m}, n, \mathrm{Prim}(\vec{m}, n)) \end{aligned}$$

Exercice 1 - Quelques fonctions récursives primitives

Montrer que si $b \in \mathbb{N}$ et $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ est récursive primitive, alors $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie comme suit est récursive primitive :
$$\begin{aligned} f(0) &= b \\ f(x+1) &= h(x, f(x)) \end{aligned}$$

En déduire que les fonctions suivantes sont récursives primitives, avec la convention que 0 correspond à *Faux* et que tout autre entier correspond à *Vrai*.

- La fonction factorielle,
- Les connecteurs logiques $\wedge, \vee, \neg$,
- La fonction prédécesseur.

Exercice 2 - Maximisation bornée

Soit h une fonction récursive primitive. Une fonction f est obtenue par schéma de *maximisation bornée* à partir de h en étant définie par :

$$f(\vec{x}, y) = \text{le plus grand entier } t \leq y \text{ tel que } h(\vec{x}, t) = 0 \text{ s'il existe un tel entier,}$$
$$f(\vec{x}, y) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est stable par maximisation bornée.

Une fonction g est obtenue par schéma de *minimisation bornée* à partir de h en étant définie par :

$$g(\vec{x}, y) = \text{le plus petit entier } t \leq y \text{ tel que } h(\vec{x}, t) = 0 \text{ s'il existe un tel entier}$$
$$g(\vec{x}, y) = 0 \text{ sinon.}$$

Montrer que l'ensemble des fonctions récursives primitives est stable par minimisation bornée.

Exercice 3 - Paires

Montrer qu'il existe $J : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, et $K, L : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

1. J, K et L sont récursives primitives,
2. J est une bijection, et
3. on a $K(J(x, y)) = x$ et $L(J(x, y)) = y$ pour tout x, y.

Exercice 4 - Fibonacci

Montrer que la fonction définie comme suit est récursive primitive :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f(1) &= 1 \\ f(n+2) &= f(n+1) + f(n) \end{aligned}$$

Exercice 5 - Caractérisation des fonctions RP par itération

Soient $h : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, et g de $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. On appelle *itération de h initiée par g* la fonction $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$f(\vec{x}, n) = \begin{cases} g(\vec{x}) & \text{si } n = 0 \\ h(f(\vec{x}, n-1), n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la plus petite classe de fonctions sur les entiers qui contient les fonctions de base, les fonctions J, K, L et qui est close par itération et composition, coïncide avec l'ensemble des fonctions récursives primitives.