TD 7

Calculabilité
Extraits du DM de 2022

Luc Lapointe
lapointe@lmf.cnrs.fr
home.lmf.cnrs.fr/LucLapointe/

Tous les documents sont autorisés. Les résultats vus en TD ou ailleurs qu'en cours, s'ils sont utilisés, doivent être redémontrés. Ceux vus en cours, même les résultats admis, ne doivent pas être redémontrés, mais seront cités de façon non ambiguë. Seules les notions et notations du cours - de préférence celles des transparents - seront admises dans les réponses.

Exercice 1 Réductions

Pour chacun des problèmes suivants, dire q'ils sont décidables ou non. Justifier. Dans le cas où un problème est indécidable, on exhibera une réduction à partir d'un autre problème indécidable, que l'on citera. Si cette réduction adéjà été vue en cours, plutôt que de la redécrire complètement, rappelez cette réduction et dites quelles modifications vous lui apportez.

1. **Donnée :** un alphabet fini Σ, deux fonctions $f, g : \Sigma \to \Gamma^*$ (pour un certain alphabet Γ), décrites par la liste des valeurs $f(a)$ et $g(a), a \in \Sigma$;
   Question : existe-t-il un mot $w \in \Sigma^*$ non vide tel que $f^*(w) = g^*(w)$?
   L'alphabet Σ est supposé donné par la liste de ses lettres, sans répétition. Bon, pour cette question, je vous aide : ce problème est indécidable. Mais quelle réduction, à partir de quel problème, le montre-t-il ?
2. Le même problème, mais on ne demande plus que w soit non vide.
3. Le problème $\textbf{semiThue}_\varepsilon^{\text{left}}$ suivant :
   Entrée : un système de réécriture (A, S, w_0) ;
   Question : a-t-on $w_0 \to_{\text{left}}^* \varepsilon$ via S ?
   On rappelle que A est l'alphabet, S une liste finie de règles de réécriture $l_i \to r_i$ entre mots de A^* ($1 \leq i \leq n$), et w_0 est un mot de A^*. On note $w \to_{\text{left}} w'$ si et seulement si on peut réécrire w en w' en une étape par réécriture *le plus à gauche* ; formellement, si w est de la forme ul_iv, w' est égal à ur_iv, mais on ne peut pas écrire w sous la forme $u'l_jv'$ pour aucun indice $j \in \{1, \dots, n\}$ et pour aucun mot u' structement plus court que u. (Par exemple, avec les règles $q_1a \to bq_2$ et $bq_1a \to q_3ba$, on a $\$bq_1ac \to_{\text{left}} \$q_3bac$, mais pas $\$bq_1ac \to_{\text{left}} \$bbq_2c$.)
4. **Entrée :** une fonction primitive récursive f d'arité 1, représentée par un terme p.r. d'arité 1 ;
   Sortie : existe-t-il un entier n tel que $f(n) = 0$?

Exercice 2 Fonctions primitives récursives

Soit A la fonction d'Ackermann-Péter (à deux arguments). On rappelle qu'elle est définie par :

$$A(0,m) \stackrel{def}{=} m+1$$
$$A(n+1,0) \stackrel{def}{=} A(n,1)$$
$$A(n+1,m+1) \stackrel{def}{=} A(n,A(n+1,m)).$$

On note A_1 la fonction définie par $A_1(n) \stackrel{def}{=} A(n,n)$, et α la fonction définie par $\alpha(k) \stackrel{def}{=} \min\{n \in \mathbb{N} \mid k \leq A_1(n)\}$; α est une fonction totale de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, car $A_1(n)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Question 1 Montrer que $k > A(n,m)$ si et seulement si : (a) soit $n=0$ et $k > m+1$; (b) soit $n \neq 0, m=0$, et $k > A(n-1,1)$; (c) soit $n \neq 0, m \neq 0, k > A(n,m-1)$ et $k > A(n-1,A(n,m-1))$.

Question 2 La fonction α est-elle primitive récursive ? Justifier.

Exercice 3 Une autre forme de problème de réécriture

On considère le problème suivant **semiThueAB** :

Entrée : Un alphabet fini A, deux lettres distinctes a et b de A, une liste S de règles de réécriture $u_i \to v_i$ $(1 \leq i \leq n)$ sur A^* où u_i et v_i sont non vides et de même longueur ;

Question : existe-t-il un entier naturel $n \geq 1$ tel que $a^n \to^* b^n$ par le système de réécriture S ?

La notation c^n représente le mot contenant n lettres toutes égales à c.

Question 1 Soit $M \stackrel{def}{=} (Q, q_0, \Sigma, \delta, B, \$)$ une machine de Turing à une bande. On pose $Q^+ \stackrel{def}{=} Q \uplus \{\mathbf{accept}, \mathbf{reject}\}$ comme en cours, et on définit $A \stackrel{def}{=} Q^+ \uplus \Sigma \uplus \{a,b\}$, avec $a \neq b$ et $a, b \notin Q^+ \uplus \Sigma$. ($\uplus$ dénote une union disjointe.)

Compléter le système de réécriture suivant :

$$aa \to \$q_0 \tag{1}$$
$$a \to B \tag{2}$$
$$\dots$$
$$\$q_f \to bb \tag{3}$$

de sorte que le système obtenu, notons-le S, soit tel qu'il existe $n \geq 1$ tel que $a^n \to^* b_n$ si et seulement si M termine sur l'entrée ε.

On attend une liste explicite des règles manquantes, une explication claire de l'idée, et au moins une esquisse de preuve de correction.

Question 2 Pourquoi **semiThueAB** est-il indécidable ? Quelle est la réduction ? À partir de quel problème ?