Langages Formels

Licence Informatique/Math-Info – ENS Paris-Saclay

Examen du 27 mai 2025

Toutes les réponses devront être correctement justifiées. Temps : 2h.

Rappels

On note w^R le *miroir* d'un mot w.

Une grammaire algébrique G est donné par $\langle \Sigma, V, P, S\rangle$, pour un alphabet de *terminaux* Σ, un ensemble de variables V, des productions $P \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^*$, tous fini, et $S \in V$ le symbole de départ. Sans mention particulière, toute grammaire utilisée dans ces exercices est algébrique.

Un automate à pile (AAP) $\mathcal{A}$ est donné par $\langle Q, \Sigma, Z, T, q_0 z_0, F\rangle$, avec Q les états, Σ l'alphabet, Z les symboles de pile, $T \subseteq QZ \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times QZ^*$ les transitions (tous fini), $q_0 z_0$ la configuration initiale, et $F \subseteq Q$.

Un automate réalisant une *fonction séquentielle* est donnée par $\mathcal{A} = \langle Q, A, B, q_0, \odot, \circledast, m, \rho\rangle$ avec Q un ensemble fini d'états, A et B les alphabets d'*entrée* et de *sortie*, $\odot : Q \times A \to Q$ une fonction *partielle* de transition et $\circledast : Q \times A \to B^*$ une fonction partielle de sortie telle que $\mathrm{dom}(\circledast) = \mathrm{dom}(\odot)$; enfin $q_0 \in Q$ est l'état initial, $m \in B^*$ est le préfixe initial et $\rho : Q \to B^*$ la fonction partielle finale. Pour $X \subseteq B^*$ non vide, $\bigwedge X$ note le préfixe maximal commun des mots dans B. Le *résiduel* de $u \in A^*$ est donné par $\mathrm{dom}(f_u) = u^{-1}\mathrm{dom}(f)$ et $f_u(v) = (\bigwedge f(uA^*))^{-1} f(uv)$ pour $uv \in \mathrm{dom}(f)$.

1 Algébriques et entiers

Dans cette exercice, $\Sigma := \{0, 1, \#\}$. Pour un entier positif n, on note $b_n \in 1 \cdot \{0,1\}^*$ sa représentation binaire en commençant par le bit de poids fort, p.ex. $b_4 = 100$.

(a) Soit $L_1 = \{\, b_n \# b_{n+1}^R \mid n \geq 1 \,\}$. Construire une grammaire qui engendre L_1.

(b) Soit $L_2 = \{\, b_n \# b_{n+1} \mid n \geq 1 \,\}$. Montrer que L_2 n'est pas algébrique.

(c) Soit $L_3 = \Sigma^* \setminus \{\, b_1 \# \cdots \# b_n \mid n \geq 1 \,\}$. Montrer ou refuter que L_3 est algébrique.

2 Formes normales

Une grammaire est en *forme normale de Greibach* (FNG) si $P \subseteq V \times \Sigma V^*$, c'est à dire toute production est de la forme $A \to a\alpha$, avec $a \in \Sigma$ et $\alpha \in V^*$. Elle est FNG(k) si $P \subseteq V \times \Sigma V^{\leq k}$.

Une grammaire est dite *opérateur* si aucune production ne contient deux variables consécutives à droite ; par exemple, une production comme $A \to aBC$ est interdite.

Dans le suivant il est admis que tout langage algébrique qui ne contient pas le mot vide possède une grammaire FNG.

(a) Montrer que toute grammaire qui n'engendre pas le mot vide est équivalente à une grammaire FNG(2).

(b) Montrer que toute grammaire qui n'engendre pas le mot vide est équivalente à une grammaire opérateur.

3 Fonctions séquentielles

Soit $A = B = \{0, 1\}$. La fonction $f : A^* \to B^*$ est définie comme $f(u_1 \cdots u_n) = v_1 \cdots v_n$ (où les u_i, v_i sont des lettres), avec $f(v_i) = u_{i-1}$ si $u_{i-1} = u_{i+1}$ et $f(v_i) = u_i$ sinon. On pose $u_0 = u_{n+1} = 0$. La fonction g est définie comme f, mais avec $u_0 = 1$.

Par exemple, $f(101) = 010$ et $f(1101) = 1110$, mais $g(101) = 110$.

(a) Donner (un dessin suffit) un automate séquentiel avec au plus 5 états qui réalise f.

(b) Énumérer les résiduels de f.

(c) En construire l'automate des résiduels.

(d) Donner un automate séquentiel qui réalise g.