Pavage avec dominos

Lopez Aliaume

16 octobre 2015

Donnée : Un ensemble $\mathcal{C}$ de couleurs et $\mathcal{D}$ de dominos avec un domino spécial d_0
Question : Peut-on paver le quart de plan en respectant les contraintes de couleurs ?

Réduction du problème de pavage

Construction d'une instance du problème de domino à partir d'une instance du problème de pavage

Soit (T, H, V, t_0) une instance du problème du pavage du quart de plan. On va construire $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ et d_0 pour avoir une instance du problème de pavage avec dominos.

On remarque que $\mathcal{C}$ peut contenir des couleurs inutilisées, on va donc tout simplement écrire comme ensemble de couleurs (qui est fini car T est fini) :

$$\boxed{\mathcal{C} = (T \times T) \cup \{0, 1\}}$$

On construit maintenant les dominos, $\forall t \in T$, on construit un ensemble de dominos associés comme sur la figure 1, où :

$$\begin{cases} (t, h) \in V \\ (b, t) \in V \\ (t, d) \in H \\ (g, t) \in H \end{cases}$$

Et on constuit une tuile avec 1 à gauche (resp. bas) **si et seulement si** $(t_0, t) \in H$ (resp. V).

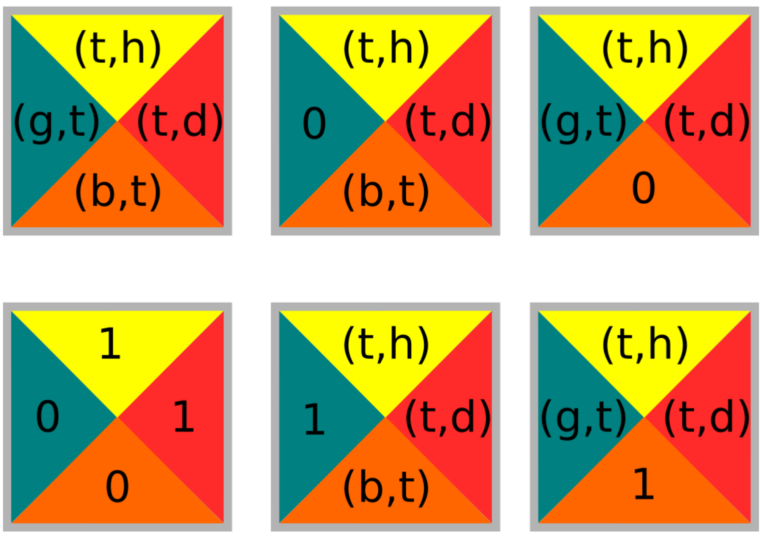

Figure 1 – Tuiles générées

Explication :

— 1 signale la compatibilité avec la tuile de départ t_0, pour que les dominos soient bien compatibles avec la tuile d_0

— 0 signale que le domino peut ne pas avoir de voisin à gauche ou en bas, (car aucun domino n'a de 0 en haut ou à gauche) et cela permet de prendre en charge les tuiles qui auraient des relations seulement à gauche, droite et en haut, ou droite, haut, bas.
— Les autres signalent qu'il y a effectivement une relation allant de t vers une autre tuile

On remarque que T étant fini, tout comme H et V, on construit à pour chaque tuile un nombre fini de dominos, et donc $\mathcal{D}$ est fini. La tuile d_0 est l'unique tuile générée qui ne comporte que des 0 et des 1.

On a construit un problème de pavage avec dominos $(\mathcal{C}, \mathcal{D}, d_0)$.

Démonstration de l'équivalence pour les résolutions des deux problèmes

Une solution pour les dominos amène une solution pour le pavage

On suppose que l'on a $d : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathcal{D}$ un pavage avec dominos du plan, et $d(0,0) = d_0$.

On remarque que chaque domino est associé à une unique tuile car le domino contient dans ses couleurs la tuile qui l'a généré, sauf le domino d_0, qui est associé à t_0, on note h la fonction qui récupère la tuile à partir du domino :

$$h : \begin{cases} d_0 \mapsto t_0 \\ d_i \mapsto h(d_i) \end{cases}$$

Un candidat naturel pour une solution du pavage du plan serait :

$$p = h \circ d$$

Pour que cette fonction soit effectivement un pavage, il *suffit* de vérifier que deux dominos côte à côte correspondent à deux tuiles en relation (ie : h est compatible). Il y a plusieurs cas à vérifier, on propose de vérifier seulement la compatibilité à gauche, la même preuve s'appliquant pour la droite, le haut et le bas.

Soit deux tuiles d_1 et d_2 côte à côte dans le pavage des dominos avec d_1 à gauche de d_2. Alors la couleur à droite de d_1, c_1 et égale à la couleur à gauche de d_2, c_2.

Or d_1 est un domino crée à partir de la tuile $t_1 = h(d_1)$ et d_2 est un domino crée à partir de la tuile $t_2 = h(d_2)$.

On énumère les couleurs possibles des deux côtés et qui seraient compatibles :

d_1	d_2
(t_1, x)	(t_1, x)
(x, t_2)	(x, t_2)
0	0
1	1

Or, la première ligne force par construction des dominos $x = t_2$, et donc encore par construction, on sait que $(t_1, t_2) \in H$. Il en va de même pour la deuxième ligne. De plus, il est impossible d'avoir un zéro à sa droite, et donc la troisième ligne ne peut pas arriver. Enfin, le seul domino qui a un 1 à sa droite est d_0 qui est associé à t_0 et les seuls dominos qui ont un 1 à leur gauche sont ceux tels que $(t_0, t) \in H$.

Conclusion :

$$\boxed{(h(d_1), h(d_2)) \in H}$$

Comme la relation est compatible, on a donc bien $p = h \circ d$ qui est un pavage du plan (on a bien $p(0,0) = h(d(0,0)) = t_0$.

Une solution du pavage amène une solution pour les dominos

Soit $p : \mathbb{N}^2 \longrightarrow T$ une solution au problème de pavage. On doit construire d une solution au pavage avec dominos.

On pose $d(0,0) = d_0$, et si $i > 1$ on pose $d(0,i)$ le domino tel que sa couleur en bas soit 0 et sa couleur à gauche soit $(p(0,i-1), p(0,i))$ et sa couleur à droite soit $(p(0,i), p(0,i+1))$ et sa couleur en haut soit $(p(0,i), p(1,i))$ (qui existe, parce que p est un pavage, qui respecte les relations). On pose de la même manière $d(1,0)$ en mettant cette fois 0 en bas et 1 à gauche (et gardant la même équation pour le haut et la droite.

Cette ligne respecte par construction les couleurs des dominos.

On procède maintenant par récurrence pour ajouter les lignes suivantes. On écrit la ligne $k > 1$ telle que :

$$d(k,0) = ((0, p(k,0)), (p(k,0), p(k,1)), (p(k-1),0), (p(k,0), p(k+1,0)))$$

$$d(k,i) = ((p(k,i-1), p(k,i)), (p(k,i), p(k,i+1)), (p(k-1,i), p(k,i)), (p(k,i), p(k+1,i)))$$

On vérifie encore que, par construction ces dominos existent bien, et que les couleurs sont compatibles avec celles de la ligne précédente.

Reste à construire la première ligne, qui va être exactement comme une ligne quelconque, sauf que le domino $d(1,0)$ aura un 1 en bas (ce qui est encore une fois possible).

On a construit un pavage du plan avec des dominos d.

Conclusion

Le pavage du plan avec des dominos est indécidable par réduction.