Révisions

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 —— Preuves en vrac

Démontrer les formules suivantes en déduction naturelle du premier ordre et/ou dans LK:

1. $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \vee \psi)$
2. $\vdash (\varphi \wedge \psi \to \varphi') \Leftrightarrow (\varphi \to \psi \to \varphi')$
3. $\vdash (\varphi' \to \varphi) \vee (\varphi' \to \psi) \to (\varphi' \to \varphi \vee \psi)$
4. $\vdash \forall x.\varphi \to \exists x.\varphi$
5. $\vdash (\forall x.\varphi \vee \forall x.\psi) \to \forall x.(\varphi \vee \psi)$
6. $\vdash \exists x.(\varphi \wedge \psi) \to (\exists x.\varphi \wedge \exists x.\psi)$
7. $\vdash \exists y.\forall x.\varphi \to \forall x.\exists y.\varphi$

Exercice 2 —— Tableaux

En utilisant les tableaux, montrer que les formules suivantes sont valides, ou donner des contres-modèles.

1. $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$
2. $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
3. $(p \to r) \to ((p \to q) \vee (q \to r))$
4. $(p \to (q \vee r)) \to ((p \to q) \vee (p \to r))$
5. $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)) \to r$

Exercice 3 —— Graphes 3-coloriables

Montrer qu'un graphe est 3-coloriable si et seulement si toute partie l'est.

Exercice 4 —— Construction de Gödel

L'objectif de cet exercice est de construire une formule G telle que ni G, ni $\neg G$ ne soient démontrables dans PA.

Soit w une variable. Soit f la fonction recursive telle que $f(n, p, q) = 1$ si $n = \ulcorner \pi \urcorner, p = \ulcorner A \urcorner$, et π est une preuve dans l'arithmétique de $(\boldsymbol{q}/w)A$, sinon $f(n, p, q) = 0$.

Soient $F[x_1, x_2, x_3, y]$ la proposition représentant f et $T \stackrel{\{\mathrm{def}\}}{=} \forall x.\, \neg F[x, w, w, \mathbf{1}]$. Soient $m = \ulcorner T \urcorner$ et G la proposition close $(m/w)T$.

1. Montrez que si G est prouvable dans PA, alors G n'est pas prouvable dans PA.
2. En admettant que PA est ω-cohérente, montrez que si $\neg G$ est prouvable dans PA, alors G aussi.
3. Conclure.

Exercice 5 —— Récurrence forte dans Peano

On définit le schéma d'induction comme la formule:

$$\varphi(0) \to [\forall x.(\varphi(x) \to \varphi(x'))] \to \forall x \varphi(x)$$

1. Montrer dans larithmétique de Peano, ou utiliser librement dans la suite:
   - $\forall x.(x \leq 0 \to x = 0)$
   - $\forall x, \forall y.(y \leq x' \to y \leq x \vee y = x')$
   - $\forall x, \forall y.(x \leq y \vee y \leq x)$
2. Montrer que l'arithmétique de Peano admet aussi le schéma d'induction forte, à savoir:

$$\varphi(0) \to [\forall x.(\forall y.(y \leq x \to \varphi(y)) \to \varphi(x')] \to \forall x.\varphi(x)$$

Exercice 6 —— Logique inuitionniste

Pour chacune des formules suivantes, si elles ne sont pas prouvables constructivement, donnez une $\mathbf{IQC}$-structure ne les validant pas, sinon, donner un preuve dans $\mathtt{LJ}$.

- $X \to \neg\neg X$
- $\neg\neg X \to X$
- $\neg X \vee \neg\neg X$
- $\neg(X \wedge Y) \to (\neg X \vee \neg Y)$
- $(\neg X \vee \neg Y) \to \neg(Y \wedge X)$
- $(X \to Y) \to (\neg X \vee Y)$
- $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$
- $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B)$

Exercice 7 —— Logique modale

Pour chaque formule, donner une preuve (sémantique ou dans **K**), ou exhiber un contre-modèle

1. $\Box(P \to Q) \to (\Diamond P \to \Diamond Q)$
2. $\Box(P \vee Q) \to (\Box P \vee \Box Q)$
3. $\Diamond(P \wedge Q) \leftrightarrow (\Diamond P \wedge \Diamond Q)$
4. $(\Diamond P \to \Box Q) \to \Box(P \to Q)$