

TD 10 – Presburger et Ehrenfeucht-Fraïssé

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1

Soit φ une formule de l'arithmétique de Presburger sans quantificateurs, et avec une seule variable libre. Montrer que $\llbracket \varphi \rrbracket := \{n \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z} \models \varphi(n)\}$ est fini ou de complémentaire fini.

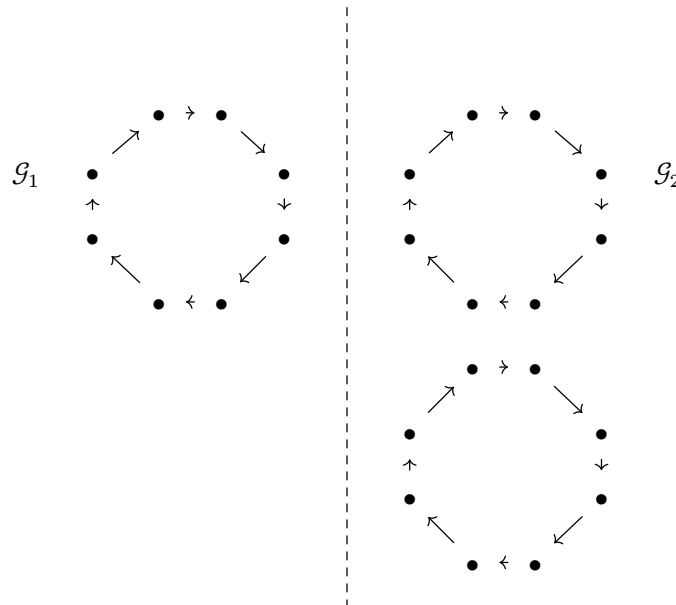
Exercice 2 — Théorie de Presburger (*)

En dénotant \mathcal{T}_p l'ensemble des axiomes de l'arithmétique de Presburger, montrer dans LK

$$\mathcal{T}_p \vdash \forall n. (\exists x. n = 3x) \wedge (\exists y. n = 2y) \rightarrow (\exists z. n = 6z)$$

Exercice 3 — Jeux d'Ehrenfeucht-Fraïssé

On considère un jeu d'Ehrenfeucht-Fraïssé sur les structures suivantes.



1. Montrer qu'il existe une stratégie gagnante pour le duplicateur en 3 coups.
2. (Contrôle continu) Généraliser pour \mathcal{G}_1 avec 2^n sommets, \mathcal{G}_2 deux fois 2^n sommets, et n coups.

Exercice 4 — Une autre théorie décidable

Nous travaillons sur le langage contenant le symbole de prédicat binaires $<$.

Définition — Théorie des ordres totaux denses sans extrémités \mathcal{T}_O

La théorie \mathcal{T}_O est définie par les axiomes suivants:

$$(O_1) \forall x \forall y. \quad \neg(x < y \wedge y < x)$$

$$(O_2) \forall x \forall y \forall z. x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$$

$$(O_3) \forall x \forall y. \quad x < y \vee x = y \vee y < x$$

$$(O_4) \forall x \forall y \exists z. x < y \Rightarrow x < z \wedge z < y$$

$$(O_5) \forall x \exists y. \quad x < y$$

$$(O_6) \forall x \exists y. \quad y < x$$

Les modèles de \mathcal{T}_O sont les ensembles munis d'un ordre total dense sans extrémités.

1. Familiarisons-nous avec cette théorie:
 1. Montrez que ses modèles sont infinis.
 2. Donnez deux modèles non isomorphes de \mathcal{T}_O
 3. Montrez que \mathcal{T}_O est cohérente.

Le but de cet exercice est de montrer que cette théorie est décidable, en montrant qu'elle satisfait l'élimination des quantificateurs. On veut donc montrer que, pour toute formule ψ de la forme $\exists x. \bigvee_{i=1}^m \bigwedge_{j=1}^m L_{i,j}$ de variables libres x_1, \dots, x_k où $L_{i,j}$ est un atome, il existe une formule φ sans quantificateurs avec les mêmes variables libres telle que $\mathcal{T}_O \vdash \forall x_1, \dots, x_k. [\varphi \Leftrightarrow \psi]$.

2. Montrez que l'on peut se ramener au cas où ψ ne contient que des atomes de la forme : $x = x_i$, $x_i = x_j$, $x_i < x_j$, $x_i < x$, $x < x_i$.
3. Montrez qu'il suffit de montrer le résultat pour des formules de la forme $\exists x. \bigwedge_{j=1}^m K_j$ où K_j est de la forme $x = x_i$, $x_i = x_j$, $x_i < x_j$, $x_i < x$, or $x < x_i$.

On considère donc par la suite une formule ψ de la forme décrite en question 3.

4. Traitez le cas où ψ contient une formule de la forme $x = x_j$.
5. Dans le cas contraire, montrez que ψ est équivalente à une formule de la forme $K_1 \wedge \exists x. K_2$ telle que:
 - $K_1 = \bigwedge_r K_r$ de variables libres x_1, \dots, x_k ,
 - K_2 est de la forme

$$\bigwedge_{i \in I} x_i < x \wedge \bigwedge_{j \in J} x < x_j$$

où I et J sont des sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$.

6. Montrez que si $I \cap J \neq \emptyset$ alors ψ est équivalente à \perp .
7. Montrez que si $I \cap J = \emptyset$ alors ψ est équivalente à une formule sans quantificateurs.
8. Concluez que \mathcal{T}_O est complète, et décidable.

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 13/05 ou avant par mail, sous la forme Nom_Prenom_Numero (ou similaire):
Voir exo 3.