

TD 11 – Résolution bis

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr
Théo Vignon theo.vignon@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Arbre sémantique

Soit $\mathcal{L}$ le langage contenant pour symboles de fonctions, a d'arité nulle, f d'arité 1, et deux prédicats unaires P et Q .

Soit $E = \{P(x), \neg P(f(x)) \vee \neg Q(a), Q(a) \vee \neg P(f(a))\}$ un ensemble de clauses, et considérons l'énumération suivante des atomes clos : $P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), \dots$

Construisez l'arbre sémantique associé.

Exercice 2 — Stratégie négative

Dans cet exercice, on se concentre sur les formules propositionnelles. Le langage contient seulement des symboles de prédicat constants $P_1, P_2, \dots$

Une clause est négative si elle ne contient que des littéraux négatifs. On étudie la stratégie de résolution appelée stratégie négative : les applications de la règle de résolution sont limitées au cas où une des prémisses est négative. On écrit $\vdash_{-}$ la relation de déduction associée.

1. Soit $E = \{\neg P \vee Q, P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$. Montrez que $E \vdash_{-} \perp$.

On appelle interprétation partielle un sommet d'un arbre sémantique associé à l'énumération $P_0, P_1, \dots$ représentée par l'ensemble des littéraux choisis à ce point. Si I et J sont des interprétations partielles, on écrit $I \leq_{\text{lex}} J$ quand il existe $k \geq 1$ tel que :

- pour tout $j < k$ $P_j \in J$ et $P_j \in I$, ou $\neg P_j \in J$ et $\neg P_j \in I$;
- $\neg P_k \in I$ et $P_k \in J$.

2. Quelle est l'interprétation partielle associée à :

- (a) la racine ?
- (b) ses enfants ?
- (c) les enfants d'un sommet représenté par l'interprétation partielle I de taille k ?

3. Montrez que $\leq_{\text{lex}}$ est un ordre et que pour toutes interprétations partielles I et J , on a $I \subseteq J$, $J \subseteq I$, $I \leq_{\text{lex}} J$, ou $J \leq_{\text{lex}} I$.

4. Soit A l'arbre sémantique associé à un ensemble de clauses E . En supposant que A est fini et non vide, montrez qu'il existe une unique interprétation partielle maximale pour $\leq_{\text{lex}}$ étant une feuille et n'invalidant pas de clause négative de E .

5. Prouvez la complétude de $\vdash_{-}$ en utilisant des arbres sémantiques.

Indice : considérez la feuille maximale pour $\leq_{\text{lex}}$ n'invalidant aucune des clauses de E^ dans l'arbre de ce dernier, avec $E^* = \{C : E \vdash_{-} C\}$.*

Exercice 3 — Stratégie d'entrée

De retour au premier ordre, considérons une signature $\mathcal{P}, \mathcal{F}$.

On considère une autre stratégie de résolution : la règle de résolution est restreinte au cas où au moins une des prémisses est dans l'ensemble de clauses original. On appelle cette stratégie la stratégie d'entrée.

1. Montrez que $\perp$ ne peut pas être dérivé depuis $E = \{P \vee Q, \neg P \vee Q, P \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q\}$ en utilisant cette stratégie. Que pouvez-vous en déduire ?
2. Une clause de Horn est une clause contenant au plus un littéral positif. Montrez que de telles clauses sont stables par résolution et factorisation.

Soient P, P', Q, Q' des littéraux, et σ l'unificateur le plus général du problème d'unification $\{P \stackrel{?}{=} P', Q \stackrel{?}{=} Q'\}$, i.e. une substitution σ telle que $\sigma(P) = \sigma(P')$ et $\sigma(Q) = \sigma(Q')$, et pour toute autre substitution θ unifiant ce problème, il existe η telle que $\theta = \eta \circ \sigma$.

3. On pose $\sigma_P = \text{mgu}(P, P')$ et $\sigma_Q = \text{mgu}(\sigma_P(Q), \sigma_P(Q'))$. Montrez que $\sigma = \sigma_Q \circ \sigma_P$.

Le but de cet exercice est de montrer que la stratégie d'entrée est complète pour les clauses de Horn. Fixons un ensemble de clauses de Horn E . On veut alors montrer par récurrence que pour toute preuve par résolution π d'une clause C à partir de E , il existe une autre preuve π' de C depuis E qui suit la stratégie d'entrée. On définit dans ce but :

- $N(\pi)$, le nombre de règles de π ,
 - $H(\pi)$, le nombre de règles dans la sous-preuve gauche de π (si π commence par une factorisation, il s'agit du nombre de règles de sa seule sous-preuve).
4. Prouvez que la stratégie d'entrée sur un ensemble de clauses de Horn est complète. Procédez par récurrence sur $(N(\pi), H(\pi))$, ordonné par l'ordre lexicographique.

Astuce : Le cas problématique est celui où la première règle de π est une résolution. Dans ce cas, faites une disjonction de cas sur la première règle R' à gauche, et permutez ces deux règles afin de réduire la taille de la sous-preuve de gauche.