

TD 1 – Grammaires et AAP

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Dyck à n paires de parenthèses

Soit $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}$ l'alphabet formé de n paires de parenthèses. Un mot est bien paranthésé s'il se réduit au mot vide via les règles, pour tout $i \in [1, n]$, $a_i b_i \rightarrow \varepsilon$.

Donner une grammaire engendrant le langage de Dyck $D_n^* = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ est bien paranthésé}\}$

Exercice 2 — Exemples d'automates à pile

1. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{u\tilde{u} \mid u \in \Sigma^*\}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage de Dyck D_n^* .
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2|w|_b\}$.
4. Construire un automate à pile reconnaissant par pile vide le langage $L_3 = \{a^n b^p \mid 1 \leq n \leq p \leq 2n\}$.

Exercice 3 — langage linéaire et automates à pic

Un automate à un pic est un automate à pile tel que dans tout calcul valide, la taille de la pile n'augmente plus une fois qu'elle a diminué. La taille de la pile peut donc augmenter (au sens large) pendant une première partie du calcul, puis elle ne fait que diminuer (au sens large). Un langage est à un pic s'il peut être accepté par pile vide par un automate à un pic.

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \geq 1\}$ est un langage à un pic.
2. Montrer que le langage $K = \{ba^{i_1} ba^{i_2} b \dots ba^{i_n} b \mid n \geq 1 \text{ et } \exists j, i_j \neq j\}$ est un langage à un pic.
3. Montrer que tout langage linéaire est un langage à un pic.

Exercice 4 — Unique symbole de pile

On s'intéresse ici à des automates dont l'alphabet de pile Γ est un singleton $\{z\}$.

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^m c \mid 1 \leq m \leq n\}$ peut être accepté par pile vide et état final par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.
2. Montrer que le langage L ne peut pas être accepté par pile vide par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.

Contrôle continu

À rendre en TD le jeudi 10/04 ou avant par mail.

Exercice 1 — Exemples d'automates à pile

1. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i + j = k\}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i + k = j\}$.
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage des palindromes $\{u \in \Sigma^* \mid \tilde{u} = u\}$ où \tilde{u} est l'image miroir de u .

Exercice 2 — Variantes d'automates à pile

Soit $A = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile A' reconnaissant le même langage et tel que $T' \subseteq Q' \times Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q' \times Z^{\leq 2}$.
2. Montrer que l'on peut construire un automate à pile A'' équivalent à A tel que les mouvements de la pile sont uniquement du type push ou pop ou skip.