

TD 1 – Logique propositionnelle

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Définitions inductives

- Définissez *inductivement* les listes d'éléments de A comme un sous-ensemble de Σ_f^* pour $\Sigma_f = A \cup \{::, \text{nil}\}$
- Définissez *inductivement* l'ensemble de parenthésages bien formés (appelé langage de Dyck) comme un sous-ensemble de Σ_d^* où $\Sigma_d = \{ (,) \}$

Exercice 2 — Formules bien formées

On se place dans le langage formé des symboles de prédicat P d'arité zéro, Q d'arité un, et R d'arité deux, et deux symboles de fonction c d'arité zéro et f d'arité deux. Parmi les formules ci-dessous, lesquelles sont bien formées ? Dessinez leur arbre de syntaxe. Quelles variables sont libres, lesquelles sont liées ?

- $\forall x(Q(x) \rightarrow R(c, x))$
- $\exists y(R(x, y) \vee Q(f(x, y)))$
- $\exists y(R(x, y) \vee Q(f(x, y)))$
- $\forall x(\exists x(Q(x)))$
- $P \vee \neg P$

Exercice 3 — Formules et structures

Soit $\mathcal{L}$ le langage avec égalité sur la signature contenant un symbole de prédicat binaire $\leq$, deux symboles de fonction 0 et 1 d'arité zéro, et un symbole de fonction $\times$ d'arité deux.

1. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont bien formées ?

- $\forall x(x = 0)$
- $0 = 1$
- $\exists x(1 = 1)$
- $(\exists x(\neg(x = 0))) \leftrightarrow (\exists y(\neg(y = 0)))$
- $\exists x(\forall y(x \leq y \times y))$
- $\exists x((\forall y(x \leq y)) \wedge (\exists z \neg(x \leq z)))$
- $\exists x((0 \leq x) \rightarrow \forall y(0 \leq y))$

2. Considérons la $\mathcal{L}$ -structure avec domaine $\mathbb{N}$ et les interprétations habituelles pour tous les symboles. Parmi les formules bien formées ci-dessus, lesquelles sont valides dans la structure ?

3. Lesquelles sont valides dans toutes les $\mathcal{L}$ -structures ?

4. Lesquelles sont invalides dans toutes les $\mathcal{L}$ -structures ?

5. Écrire la formule Tout élément non nul a un inverse multiplicatif

6. Écrire la formule Le seul élément à avoir un inverse multiplicatif est 1

Exercice 4 — Démonstration : Hilbert

Soit $\mathcal{L}$ le langage formé des symboles de fonction 0 d'arité 0, S d'arité 1 et du symbole de prédicat $\leq$ d'arité 2. Les règles définissant l'ensemble des propositions démontrables sont représentées ci-dessous.

$$\frac{(t/x)A}{\forall x.A} \quad \frac{B \quad A \wedge B}{A} \quad \frac{A \quad B}{A \Rightarrow B} \quad \frac{}{\forall x.(x \leq S(x))} \quad \frac{}{\forall x.\forall y.\forall z.(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z}$$

La notation $(t/x)A$ représente la *substitution* de la variable x par le terme t dans la formule A . (P. ex, $(t/x)R(x, y) = R(t, y)$, def plus précise prochainement).

Montrer que les propositions $0 \leq S(0)$ et $0 \leq S(S(0))$ sont démontrables

Exercice 5 — Dédution naturelle

Démontrer en déduction naturelle le séquent

$$\vdash ((A \wedge B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$$

Exercice 6 — Modelisation

Formaliser les énoncés suivants (écrits en langue naturelle) en logique propositionnelle. Notez qu'il y a parfois plusieurs réponses possibles, en fonction de votre interprétation de l'énoncé.

1. Le matin, il boit un café serré avec une tartine, ou parfois un thé.
2. Si Paris est la capitale de la France, alors la Terre est ronde.
3. Si Rome est la capitale de la France, alors la Terre est ronde.
4. Si la Terre n'est pas ronde, je veux bien manger mon chapeau.
5. Il existe un pantalon qui va à tout le monde.

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 18/02 ou avant par mail.

Exercice 1

En utilisant les atomes S (le soleil brille), P (il pleut), B (il bruine), A (il y a un arc en ciel), O (il a un vent d'Ouest), E (il y a du vent d'Est), traduire en logique propositionnelle les énoncés suivants:

1. S'il pleut et que le soleil brille en même temps, alors il y a un arc en ciel,
2. Si le vent d'ouest amène la pluie, on n'a jamais vu qu'un vent d'est soit porteur de pluie,
3. La bruine est une forme de pluie.

Exercice 2

Démontrer en déduction naturelle les séquent

$$\vdash (P \wedge Q) \rightarrow (Q \wedge P) \quad \vdash (\neg(A \wedge B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \wedge ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B))$$