

TD 1 – Définitions inductives, langage et substitutions

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr
Théo Vignon theo.vignon@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Définitions inductives

- Définissez *inductivement* les listes d'éléments de A comme un sous-ensemble de $\sum_f^*$ pour $\sum_f = A \cup \{::, \text{nil}\}$
- Définissez *inductivement* l'ensemble de parenthésages bien formés (appelé langage de Dyck) comme un sous-ensemble de $\sum_d^*$ où $\sum_d = \{ (,) \}$

Exercice 2 — Parlons propositions

Soit $\mathcal{L}$ un langage à sortes $\mathcal{S} \cup \{\text{Prop}\}$ contenant des symboles $\Rightarrow, \forall, \exists, \wedge, \neg$ (où $\exists$ représente la quantification existentielle, $\wedge$ la conjonction et $\neg$ la négation).

Donnez les arités de ces symboles.

Dans la suite, tous les langages étudiés contiennent implicitement les symboles précédents avec les arités de l'exercice.

Exercice 3 — Parlons prédicats

Soit $\mathcal{L}$ le langage à sortes $\{\text{Term}, \text{Prop}\}$ formé des symboles

- $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, i, 0, 1, \times, =, \in$
- $\Rightarrow, \forall, \exists, \wedge, \neg$

1. Quelles sont les arités des symboles ?

2. Parmi les proposition suivantes lesquelles sont valides ?

- $\forall x \in \mathbb{N}, x = 0.$
- $\mathbb{C} = \mathbb{N}$
- $0 = \mathbb{N}$
- $(\exists x. x \in \mathbb{R} \Rightarrow \neg(x = 0)) = (\exists y. y \in \mathbb{R} \Rightarrow \neg(y = 0))$
- $\exists \mathbb{R}. \mathbb{R} \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R} = 0.$

3. Écrire la proposition

Tout entier naturel est un nombre complexe

4. Écrire la proposition

Tout complexe non nul a un inverse

5. Écrire la proposition

Le seul entier naturel à avoir un inverse est 1

Exercice 4 — Démonstration : Hilbert

Soit $\mathcal{L}$ le langage à sortes $\{\text{Term}, \text{Prop}\}$ formé des symboles de fonction 0 d'arité $\langle \text{Term} \rangle$, S d'arité $\langle \text{Term}, \text{Term} \rangle$ et du symbole de prédicat $\leq$ d'arité $\langle \text{Term}, \text{Term}, \text{Prop} \rangle$. Les règles définissant l'ensemble des propositions démontrables sont représentées ci-dessous.

$$\frac{\forall x.A}{(t/x)A} \quad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \quad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \quad \frac{}{\forall x.(x \leq S(x))} \quad \frac{}{\forall x.\forall y.\forall z.(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z}$$

La notation $(t/x)A$ représente la *substitution* de la variable x par le terme t dans la formule A . Par exemple, si R est un symbole d'arité $\langle \text{Term}, \text{Term}, \text{Term} \rangle$, $(t/x)R(x, y) = R(t, y)$. Vous verrez la définition précise au prochain cours, pour l'instant votre intuition devrait suffire.

Montrer que les propositions :

1. $0 \leq S(0)$
2. $0 \leq S(S(0))$

sont démontrables.

Exercice 5 — Constructions Ensemblistes

On se place dans le langage de la théorie des ensembles. Il y a donc deux sortes $\{\text{Set}, \text{Prop}\}$ et les symboles suivants :

- $\emptyset, \times, \pi_1, \pi_2, \cup, \cap, \mathcal{P}$
- $=, \in, \forall, \exists, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$
- Le schéma de compréhension $\{x \in A \mid P(x)\}$ pour tous A et P

1. Donnez les sortes des différents symboles
2. Définissez un symbole $\exists!$ (*Il existe un unique*)
3. Définissez l'ensemble des fonction B^A pour A et B des ensembles
4. Définissez l'ensemble des fonctions injectives de A vers B .
5. Définissez l'ensemble des fonctions surjectives de A vers B .
6. Définissez des notions d'injectivité et de surjectivité pour des relations. Avec ce nouveau vocabulaire, qu'est-ce qu'une fonction ?
7. Énoncez une proposition qui dit qu'il existe un ensemble infini. On note cet ensemble ω
8. Définissez l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Exercice 6 — Substitution, α -équivalence

Dans un exercice précédent, la notion de substitution a été brièvement mentionnée. Intuitivement, le principe est de remplacer une variable dans une formule par la valeur qu'on veut qu'elle ait. Par exemple, si on a démontré $\forall x. x = x$, on aimerait bien pouvoir en déduire $0 = 0$. Pour pouvoir exprimer une telle règle, il faut savoir ce que veut dire « remplacer la variable x par 0 dans la formule $x = x$ ».

Une première solution est de définir la substitution sur les termes récursivement de la façon suivante:

$$(t/x)y := \begin{cases} y & \text{si } y \neq x \\ t & \text{sinon} \end{cases}$$

$$(t/x)f(t_1, \dots, t_n) := f((t/x)t_1, \dots, (t/x)t_n)$$

1. Calculez les substitutions suivantes :

- $(0/x)x$
- $(0/x)y$
- $(0/x)x = x$
- $(0/x)\forall x. x = x$
- $(y/x)\forall y. y = x$

2. Voyez-vous le problème?

Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de considérer le cas des variables « muettes » ou liées. En effet, il est possible de changer la variable au niveau du lier et à toutes les occurrences où elle est liée sans changer la signification de la formule $\forall x. x = x$ et $\forall y. y = y$ représentent en ce sens la même formule).

On notera $\text{fv}(t)$ les variables libres de t , $\text{bv}(t)$ les variables liées de t , et $\text{Vars}(t) = \text{fv}(t) \cup \text{bv}(t)$ l'ensemble des variables apparaissant dans t .

Ainsi, pour tout symbole de fonction liant une variable (exemple ici donné avec un quantificateur), on rend équivalents les termes suivants : $\forall x. t \equiv_{\alpha} \forall y. (y/x)t$ où $y \notin \text{Vars}(t)$ et x non liée dans t (les conditions supplémentaires évitent les problèmes précédents). Ensuite, on définit $\equiv_{\alpha}$ comme la plus petite relation d'équivalence préservée par les symboles de fonctions qui contient les cas précédents.

Exercice 7 — Indices de DeBruijn

On étudie dans cet exercice un moyen alternatif de représenter les variables afin de simplifier les problèmes d' α -renommage et de substitution. En pratique, ce système est moins lisible par des êtres humains, mais plus agréable à manipuler algorithmiquement.

Le principe est de remplacer les noms de variables par des nombres. Ainsi, la variable 0 désigne la variable liée par le lieur le plus proche, la variable 1 par le suivant, etc. S'il n'y a pas assez de lieurs, ce sont des variables libres.

1. Dans les termes suivants, indiquer pour chaque variable si elle est libre ou liée, et quel lieur la lie le cas échéant.
 - $0 = 1$
 - $\forall 0 = 0$
 - $\forall \forall 0 = 1$
 - $\forall 0 = 1$
 - $\forall 0 = 1 \Rightarrow \forall 0 = 1$
2. Réécrire les termes ci-dessus avec des variables usuelles.
3. Généraliser ce processus pour traduire tout terme utilisant des indices de DeBruijn vers un terme utilisant des variables.
4. Prouver que si $t \equiv_{\alpha} u$, alors il existe un terme v écrit avec indices de DeBruijn qui peut se traduire à la fois vers t et u . Montrer que le choix de v est unique pour des termes clos.
5. En déduire un processus de décision de l' α -équivalence.
6. Comment définir la substitution pour les termes écrits avec des variables de DeBruijn de sorte à ne pas substituer des variables liées et éviter la capture de variables.