TD 2 — Grammaires et AAP (2)

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 —— Forme normale de Chomsky

Mettre les grammaires suivantes sous forme normale de Chomsky :

1. G_1 définie par les règles:

$$S \to aAa$$
$$A \to Sb$$
$$A \to bBB$$
$$B \to abb$$
$$B \to aC$$
$$C \to aCA$$

2. G_2 définie par les règles:

$$S \to AB|aS|a$$
$$A \to Ab|\varepsilon$$
$$B \to AS$$

3. G_3 définie par les règles:

$$S \to TbT$$
$$T \to TaT\ |ca$$

Exercice 2 —— Ambiguïté

- Montrer que la grammaire suivante est ambiguë :
  $S \to \text{if } c \text{ then } S \text{ else } S$
  $S \to \text{if } c \text{ then } S$
  $S \to a$
- Montrer que le langage engendré n'est pas ambigu.
- Montrer que tout langage reconnu par un automate à pile déterministe est non ambigu
- Montrer que l'inclusion est stricte en considérant le langage $L = \{a^n b^n\ |n \geq 1\} \cup \{a^n b^{2n}\ |n \geq 1\}$.

Exercice 3 —— Automate à pile à double sens

Un automate à pile à double sens peut, à chaque transition, déplacer sa tête de lecture vers la gauche ou vers la droite ou encore la laisser sur place. De plus, on supposera que la donnée w est encadrée par 2 symboles spéciaux (marqueurs) $\triangleleft$ et $\triangleright$. Le mot w est donc accepté par l'automate s'il y a un calcul réussi sur $\triangleleft w \triangleright$. De façon équivalente, un automate à pile à double sens est une machine de Turing qui ne peut pas modifier sa bande d'entrée et qui a une seule bande de travail qui est utilisée comme une pile.

1. Montrer que le langage $\{a^n b^n c^n\ |n \geq 1\}$ peut être accepté par un automate à pile déterministe à double sens.
2. Montrer que le langage $\{ww|w \in \Sigma^\star\}$ peut être accepté par un automate à pile à double sens.
3. Montrer que le langage $\{vcuvw|u, v, w \in \{a,b\}^\star\}$ peut être accepté par un automate à pile à double sens.

Exercice 4 —— Quelques automates à piles

- Construire l'automate à pile qui reconnait le langage des mots qui ne sont pas de la forme ww pour $w \in \Sigma^\star$
- ($\star$) Soit L un langage reconnu par un AAP. Construisez l'AAP reconnaissant $\mathrm{Cycle}(L) = \{vw : wv \in L\}$.
- ($\star\star$) Montrer que pour n'importe quel AAP, on peut construire un AAP équivalent à deux états.

Contrôle continu

À rendre en TD le jeudi 17/04 ou avant par mail.

Exercice 1 —— Variantes d'automates à pile

1. Soit $A = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F, K)$ un automate à pile déterministe reconnaissant par sommet de pile et état final (une configuration (q, z) est acceptante si $(q, z) \in K \subseteq Q \times Z$). Montrer qu'on peut effectivement construire un automate à pile déterministe équivalent reconnaissant par état final.
2. Soit A un automate à pile déterministe. Montrer qu'on peut effectivement construire un automate à pile qui reconnaît le même langage et dont les ε-transitions sont uniquement effaçantes : $(p, x) \to_\varepsilon \varepsilon(q, \varepsilon)$.

Exercice 2 —— Automates à pile déterministes

1. Dessiner un AAP déterministe qui accepte par pile vide le langage
$L_1 = \{a^n b^p c^n \mid n, p > 0\} \cup \{a^n b^p d^p \mid n, p > 0\}$.
2. Dessiner un AAP déterministe simple (un seul état) qui accepte par pile vide le langage $L_2 = \{a^n b a^n \mid n \geq 0\}$.