

TD 2 – Deduction naturelle et tableaux

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Sucre sémantique

En définissant, pour toutes formules φ_1 et φ_2 , la formule $\neg\varphi_1$ comme du sucre syntaxique pour $\varphi_1 \rightarrow \perp$, et $\varphi_1 \vee \varphi_2$ pour $\neg(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2)$, prouver que les règles suivantes sont admissibles, c'est-à-dire que si un séquent $\Gamma \vdash \varphi$ est démontrable en utilisant ces règles en plus des règles de déduction naturelle, il existe une preuve en déduction naturelle de $\Gamma \vdash \varphi$.

Par la suite, vous pourrez utiliser ces règles, et considérer les symboles $\vee$ et $\neg$ comme faisant partie de la logique propositionnelle.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_1}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_I^g \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi_2}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_I^d \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \neg_I \quad \frac{\Gamma_1 \vdash \varphi \quad \Gamma_2 \vdash \neg\varphi}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \perp} \neg_E$$

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \Gamma_1, \varphi_1 \vdash \psi \quad \Gamma_2, \varphi_2 \vdash \psi}{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \vdash \psi} \vee_E$$

Exercice 2 — Règles admissibles

Prouver que les deux règles suivantes sont admissibles.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \text{Cut} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} \text{CP} \quad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi} \text{W}$$

(a) La coupure (b) La contraposée (c) L'affaiblissement

Exercice 3 — Le tiers-exclu inclus

Montrer que l'ensemble des séquents démontrables en déduction naturelle coïncide avec l'ensemble des séquents en déduction naturelle où l'on a remplacé la règle de la contradiction par l'une des règles suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \vee \neg\varphi} \text{Excluded middle} \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \text{Absurd} \quad \frac{}{\Gamma \vdash ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi} \text{Peirce}$$

Bonus: $\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \text{Retour (si } \psi \text{ apparaît en conclusion plus bas dans la preuve)}$

Exercice 4 — Forme normale disjonctive

Montrer que, pour toute formule φ , la formule $\delta(\mathcal{C})$ associée à l'ensemble fini de clauses

$$\mathcal{C} = \{C \mid P_0(C) \subset P_0(\varphi), \models \gamma(C) \rightarrow \varphi\}$$

est sémantiquement équivalente à φ .

Exercice 5 — Autres formes normales

Une formule est en forme normale négative si elle ne contient que $\vee$, $\wedge$, p et $\neg p$ pour p une proposition. On donne l'algorithme suivant pour mettre une formule en forme normale négative, par induction structurale sur la syntaxe de la formule:

- $\text{nnf}(P) = P$
- $\text{nnf}(\neg P) = \neg P$
- $\text{nnf}(\varphi \vee \psi) = \text{nnf}(\varphi) \vee \text{nnf}(\psi)$
- $\text{nnf}(\neg(\varphi \vee \psi)) = \text{nnf}(\neg\varphi) \wedge \text{nnf}(\neg\psi)$
- $\text{nnf}(\varphi \wedge \psi) = \text{nnf}(\varphi) \wedge \text{nnf}(\psi)$
- $\text{nnf}(\neg(\varphi \wedge \psi)) = \text{nnf}(\neg\varphi) \vee \text{nnf}(\neg\psi)$
- $\text{nnf}(\varphi \rightarrow \psi) = \text{nnf}(\neg\varphi \vee \psi)$
- $\text{nnf}(\neg\neg\varphi) = \text{nnf}(\varphi)$

1. Montrer que pour toute formule φ , $\Gamma \vdash \varphi$ est démontrable en déduction naturelle si et seulement si $\Gamma \vdash \text{nnf}(\varphi)$ l'est.

(Bonus:) Une formule en forme normal négative est en forme normale conjonctive lorsqu'aucune conjonction n'est imbriquée dans une disjonction. On donne l'algorithme suivant pour mettre une formule en forme normale conjonctive par induction structurale sur la syntaxe de la formule:

$$\text{cnf}(\varphi \vee (\psi \wedge \psi')) = \text{cnf}((\psi \wedge \psi') \vee \varphi) = \text{cnf}(\varphi \vee \psi) \wedge \text{cnf}(\varphi \vee \psi')$$

$$\text{cnf}(\varphi \vee (\psi \vee \psi')) = \text{cnf}((\psi \vee \psi') \vee \varphi) = \text{cnf}(\varphi \vee \text{cnf}(\psi \vee \psi')) \quad \text{si } \varphi \text{ n'est pas une conjonction}$$

$$\text{cnf}(\varphi \wedge \psi) = \text{cnf}(\varphi) \wedge \text{cnf}(\psi) \quad \text{cnf}(l \vee l') = l \vee l' \quad \text{cnf}(l) = l$$

2. Montrer que pour toute formule φ , $\Gamma \vdash \varphi$ est démontrable en déduction naturelle si et seulement si $\Gamma \vdash \text{nnf}(\varphi)$ l'est.

Exercice 6 — Règles additionnelles de tableaux

Pour chaque formule φ , trouver une preuve de $\vdash \varphi$ ou donner une valuation satisfaisant $\neg\varphi$, en utilisant les tableaux.

On s'autorise à utiliser les règles suivantes:

- si T est un tableau et $(\varphi \wedge \psi)^+$ est l'étiquette d'un noeud alors $T \xrightarrow{\varphi^+} \psi^+$ est un tableau
- si T est un tableau et $(\varphi \wedge \psi)^-$ est l'étiquette d'un noeud alors $T \begin{array}{l} \xrightarrow{\psi^-} \\ \xrightarrow{\varphi^-} \end{array}$ est un tableau
- si T est un tableau et $(\varphi \vee \psi)^+$ est l'étiquette d'un noeud alors $T \begin{array}{l} \xrightarrow{\varphi^+} \\ \xrightarrow{\psi^+} \end{array}$ est un tableau
- si T est un tableau et $(\varphi \vee \psi)^-$ est l'étiquette d'un noeud alors $T \xrightarrow{\varphi^-} \psi^-$ est un tableau
- si T est un tableau et $\neg\varphi^s$ est l'étiquette d'un noeud alors $T \xrightarrow{\varphi^{-s}}$ est un tableau

1. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
2. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
3. $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 18/02 ou avant par mail.

Exercice 1 — Preuves par tableaux

En utilisant les tableaux (y compris les règles de l'exercice 6) montrer que les formules suivantes sont valides, ou donner une valuation satisfaisant sa négation:

1. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow \neg p)$
3. $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$
4. $(p \leftrightarrow \neg q) \vee (p \wedge q)$
5. $[((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \wedge (p \vee q)] \rightarrow r$