

## TD 2 – Logique des prédicats

Nicolas Dumange [nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr](mailto:nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr)

Théo Vignon [theo.vignon@ens-paris-saclay.fr](mailto:theo.vignon@ens-paris-saclay.fr)

### Exercice 1 — Preuves en vrac

Donner des démonstrations en déduction naturelle des séquents suivants :

1.  $\vdash (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \psi)$
2.  $\vdash (\varphi \wedge \psi \Rightarrow \varphi') \Leftrightarrow (\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi')$
3.  $\vdash (\varphi' \Rightarrow \varphi) \vee (\varphi' \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi' \Rightarrow \varphi \vee \psi)$
4.  $\vdash \forall x. \varphi \Rightarrow \exists x. \varphi$
5.  $\vdash (\forall x. \varphi \vee \forall x. \psi) \Rightarrow \forall x. (\varphi \vee \psi)$
6.  $\vdash \exists x. (\varphi \wedge \psi) \Rightarrow (\exists x. \varphi \wedge \exists x. \psi)$
7.  $\vdash \exists y. \forall x. \varphi \Rightarrow \forall x. \exists y. \varphi$

### Exercice 2 — Lois de De Morgan

Soit  $\varphi$  et  $\psi$  des formules. Démontrez les séquents suivants.

1.  $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
2.  $\vdash \neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
3.  $\vdash \exists x. \neg\varphi \Leftrightarrow \neg(\forall x. \varphi).$
4.  $\vdash \forall x. \neg\varphi \Leftrightarrow \neg(\exists x. \varphi).$

### Exercice 3 — Paradoxe de Russell

On considère une sorte `Set` de termes, et un symbole de prédicat  $\in$  d'arité  $\langle \text{Set}, \text{Set}, \text{Prop} \rangle$ .

Prouvez  $\forall y. (y \in a \Leftrightarrow \neg y \in y) \vdash \perp$ .

### Exercice 4 — Triangles en déduction naturelle

On considère un langage formé de

- trois sortes de termes : `points`, `droite` et `scalaire`,
- deux symboles de fonction : la distance  $d$  d'arité  $\langle \text{point}, \text{point}, \text{scalaire} \rangle$ , la médiatrice  $m$  d'arité  $\langle \text{point}, \text{point}, \text{droite} \rangle$ ,
- deux symboles de prédicats : l'égalité  $=$  d'arité  $\langle \text{scalaire}, \text{scalaire} \rangle$ , l'appartenance  $\in$  d'arité  $\langle \text{point}, \text{droite} \rangle$ .

Soit  $\Gamma$  le contexte formé des deux propositions

$$\begin{cases} \forall x \forall y \forall z & [x \in m(y, z) \Leftrightarrow d(x, y) = d(y, z)] \\ \forall x \forall y \forall z & [(x = y \wedge y = z) \Leftrightarrow x = y] \end{cases}$$

et

$$\varphi = \forall w \forall x \forall y \forall z [(w \in m(x, y) \wedge w \in m(y, z)) \Rightarrow w \in m(x, z)]$$

Donnez une démonstration du séquent  $\Gamma \vdash \varphi$ .

### Exercice 5 — Erreurs fréquentes

Les arbres de la figure Fig. 1 ne sont pas des démonstrations, des erreurs s'y sont glissées. Lesquelles ? Dans quels cas les arbres  $\pi_2$  et  $\pi_3$  sont-ils des démonstrations ?

$$\frac{\frac{\frac{}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi} \text{ax}}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi} \vee_I^1 \quad \frac{\frac{\frac{}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \vee \psi} \text{ax}}{\varphi \vee \psi \vdash \psi} \vee_I^2}{\varphi \vee \psi \vdash \varphi \wedge \psi} \wedge_I}{\vdash (\varphi \vee \psi) \Rightarrow (\varphi \wedge \psi)} \Rightarrow_I$$

(a)  $\pi_1$

$$\frac{\frac{\frac{}{\exists x.\varphi \vdash \exists x.\varphi} \text{ax}}{\exists x.\varphi \vdash \varphi} \exists_E \quad \frac{\frac{}{\exists x.\varphi \vdash \varphi} \exists_E}{\exists x.\varphi \vdash \varphi} \exists_E}{\frac{\frac{}{\exists x.\varphi \vdash \varphi} \exists_E}{\exists x.\varphi \vdash \forall x.\varphi} \forall_I} \Rightarrow_I$$

(b)  $\pi_2$

$$\frac{\frac{\frac{}{\forall x.\exists y.\varphi \vdash \forall x.\exists y.\varphi} \text{ax}}{\forall x.\exists y.\varphi \vdash \exists y.\varphi} \forall_E \quad \frac{\frac{\frac{}{\forall x.\exists y.\varphi, \varphi \vdash \varphi} \text{ax}}{\forall x.\exists y.\varphi, \varphi \vdash \forall x.\varphi} \forall_I}{\frac{\frac{}{\forall x.\exists y.\varphi, \varphi \vdash \exists y.\forall x.\varphi} \exists_I} \exists_E} \Rightarrow_I$$

(c)  $\pi_3$

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi'} \text{ax}}{\varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi', \varphi \Rightarrow \psi \vdash \varphi'} \Gamma}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi \Rightarrow \varphi'} \Rightarrow_E$$

(d)  $\pi_4$

Fig. 1. – Arbres de preuves

### Exercice 6 — Règles admissibles

Prouver que les deux règles de la figure Fig. 2 sont admissibles, c'est-à-dire que si un séquent  $\Gamma \vdash \varphi$  est démontré en utilisant ces règles en plus des règles de déduction naturelle, il existe une preuve en déduction naturelle de  $\Gamma \vdash \varphi$ .

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} \text{Cut}$$

(a) La coupure

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \psi} \text{CP}$$

(b) La contraposée

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \vdash \psi} \text{W}$$

(c) L'affaiblissement

Fig. 2. – Règles admissibles

### Exercice 7 — Le tiers-exclu inclus

Montrer que l'ensemble des séquents démontrables en déduction naturelle coïncide avec l'ensemble des séquents en déduction naturelle où l'on a remplacé la règle du tiers-exclu par l'une des règles suivantes:

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg\varphi}{\Gamma \vdash \varphi} \text{Absurd}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash ((\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \varphi) \Rightarrow \varphi} \text{Peirce}$$

### Exercice 8 — Un nouveau départ

Montrer que l'ensemble des séquents démontrables en déduction naturelle coïncide avec l'ensemble des séquents en déduction naturelle où on a remplacé la règle du tiers-exclu par la règle :

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi} \text{Retour (si } \psi \text{ apparaît en conclusion plus bas dans la preuve)}$$