

TD 3 – Premier ordre, compacité, théories

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Preuves en vrac

Démontrer les formules suivantes en déduction naturelle du premier ordre:

1. $\vdash \forall x.\varphi \rightarrow \exists x.\varphi$
2. $\vdash (\forall x.\varphi \vee \forall x.\psi) \rightarrow \forall x.(\varphi \vee \psi)$
3. $\vdash \exists x.(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x.\varphi \wedge \exists x.\psi)$
4. $\vdash \exists y.\forall x.\varphi \rightarrow \forall x.\exists y.\varphi$

Exercice 2 — Substitutions

Apliquez les substitutions suivantes

1. $[u/x, u/y, u/v]\exists x\exists y(P(x, u) \wedge P(y, v))$
2. $[u/x, x/y]P(y)$
3. $[u/x][x/y]P(y)$

Exercice 3 — Compacité du calcul des propositions

On veut montrer le théorème suivant:

Théorème — Compacité

Soit Φ un ensemble de formules propositionnelles.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) Φ est satisfiable (i.e. il existe une valuation satisfaisant toutes les formules de Φ)
- (ii) Toute partie finie de Φ est satisfiable.

1) Justifier $(i) \rightarrow (ii)$

Soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une énumération des variables propositionnelles et σ une valuation sur la partie finie $(x_i)_{i \leq n}$. La valuation finie σ est adaptée à Φ si toute partie finie $\Psi \subset \Phi$ est satisfiable par un prolongement de σ à l'ensemble des variables propositionnelles apparaissant dans Ψ .

- 2) Montrer que si toute partie finie de Φ est satisfiable, alors toute valuation finie adaptée à Φ définie sur n variables propositionnelles peut se prolonger en une valuation finie adaptée à Φ définie sur $n + 1$ variables propositionnelles.
- 3) Démontrer le théorème de compacité en utilisant la question précédente.

Exercice 4 — Arithmétique de Peano

On travaille sur le langage $\mathcal{L}_{PA}$ contenant des symboles de fonctions 0 d'arité zéro, S d'arité un, ainsi que $+$ et $\times$ d'arité deux.

Définition — Arithmétique de Peano

Les axiomes de PA sont :

$$\begin{aligned} \forall x \quad 0 + x &= x \\ \forall x \forall y \quad S(x) + y &= S(x + y) \\ \forall x \quad 0 \times x &= 0 \\ \forall x \forall y \quad S(x) \times y &= (x \times y) + y \\ \forall x \exists y \quad x &= 0 \vee x = S(y) \\ \forall x \quad \neg S(x) &= 0 \\ \forall x \forall y \quad S(x) = S(y) &\rightarrow x = y \end{aligned}$$

Schéma de récurrence : pour toute formule A dont les variables libres sont incluses dans

$$x, x_1, \dots, x_n:$$

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (0/x)A \rightarrow \forall y. ((y/x)A \rightarrow (S(y)/x)A) \rightarrow \forall y. (y/x)A$$

1. Prouvez que l'axiome $\forall x \exists y \quad x = 0 \vee x = S(y)$ est superflu
2. Prouvez dans PA:
 1. $\forall x. x + 0 = x$
 2. $\forall x \forall y (x + S(y)) = S(x + y)$
 3. $\forall x \forall y (x + y) = (y + x)$
3. Définissez des formules représentant $x \leq y$ et $x < y$.
4. Exprimez dans PA que $\leq$ est une relation d'ordre. Prouvez-le.
5. Prouvez dans PA:
 1. $\forall x. (x \leq 0 \rightarrow x = 0)$
 2. $\forall xy. (y \leq S(x) \rightarrow y \leq x \vee y = S(x))$
 3. $\forall xy. (x \leq y \vee y \leq x)$
6. Prouvez le schéma de récurrence forte, c'est-à-dire pour toute formule A avec pour variables libres $z, x_1, \dots, x_n$:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. (0/z)A \rightarrow \forall x. (\forall y. (y \leq x \rightarrow (y/z)A) \rightarrow (S(x)/z)A) \rightarrow \forall y. (y/z)A$$
7. (Bonus:) Prouvez que tout ensemble non-vide d'entiers naturels définissable par une formule du premier ordre a un élément minimal, i.e. pour toute formule A avec une variable libre x :

$$PA \vdash \exists x. A \rightarrow \exists x. (A \wedge \forall y. (y < x \rightarrow \neg (y/x)A))$$

Vous pourrez utiliser librement le fait que

$$\neg \exists x. (A \wedge \forall y. (y < x \rightarrow \neg (y/x)A)) \rightarrow \forall x. (A \rightarrow \exists y. (y < x \wedge (y/x)A))$$

Exercice 5 — Diverses théories

- 1) Donnez des ensembles de fonctions et de prédicat, ainsi que des axiomes décrivant les théories suivantes.
 - a) Les relations d'équivalence
 - b) La théorie des groupes
- 2) Prouvez en théorie des groupes que l'inverse est unique.
- 3) Prouvez en théorie des groupes que si tous les éléments sont d'ordre 2, alors le groupe est abélien.

Exercice 6 — La théorie $\mathcal{Z}$

Dans la suite, on définit le langage $\mathcal{L}_{\mathcal{ZF}}$ composé du symbole $\in$ d'arité deux. Vous pouvez utiliser les notations $\cup$ et $\mathcal{P}$ pour l'union et l'ensemble des parties.

Définition — La théorie $\mathcal{Z}$

La théorie $\mathcal{Z}$ est composée des axiomes de l'égalité et des suivants:

Extensionnalité $\forall x \forall y ((\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)) \rightarrow x = y)$

Union $\forall x \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (\exists v (w \in v \wedge v \in x)))$

Paire $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w = x \vee w = y))$

Ensemble des parties $\forall x \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (\forall v (v \in w \rightarrow v \in x)))$

Schéma de compréhension restreint $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall v \exists w \forall x (x \in w \leftrightarrow x \in v \wedge A)$

pour toute proposition A de variables libres $x, x_{\{1\}}, \dots, x_{\{n\}}$. L'ensemble w sera noté $\{x \in v \mid A\}$.

Axiome de l'infini On définira $\emptyset$ dans une question ultérieure. On définit la formule suivante:

$\text{Succ}[x, y] = \forall z. (z \in y \leftrightarrow (z \in x \vee z = y))$. L'axiome de l'infini est alors:

$\exists I. (\emptyset \in I) \wedge \forall x \forall y. ((x \in I \wedge \text{Succ}[x, y]) \rightarrow y \in I)$

1. Définissez une proposition $P[x, y]$ représentant l'inclusion, i.e. $x \subseteq y$ ssi $P[x, y]$ est prouvable. Réécrivez l'axiome de l'**Ensemble des parties** avec cette notation.
2. Montrez qu'il existe un unique ensemble $\emptyset$ ne contenant aucun élément.
3. Énoncez le théorème « Pour tout élément x , il existe un ensemble ne contenant que x ». Quels axiomes de $\mathcal{Z}$ utiliseriez-vous pour le prouver?
4. Énoncez le théorème « L'union de deux ensembles est un ensemble ». Quels axiomes de $\mathcal{Z}$ utiliseriez-vous pour le prouver?
5. Énoncez le théorème « L'intersection de deux ensembles est un ensemble ». Quels axiomes de $\mathcal{Z}$ utiliseriez-vous pour le prouver?
6. On cherche à montrer que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas, c'est-à-dire montrez que $\neg \exists x \forall y. (y \in x)$ est prouvable dans $\mathcal{Z}$.
Montrer que $\exists x \forall y. (y \in x) \vdash \exists a \forall y (y \in a \leftrightarrow \neg (y \in y))$ dans $\mathcal{Z}$.

Le contrôle continu montre la étape.

Exercice 7 — La théorie ZF

Définition — La théorie ZF

La théorie ZF est définie en remplaçant le schéma de compréhension restreinte dans Z par le **Schéma de remplacement**:

$$\forall x_1 \dots x_n xy y'. (F[x, y] \wedge F[x, y'] \rightarrow y = y') \rightarrow \exists b \forall y. (y \in b \leftrightarrow \exists a. (x \in A \wedge F[x, y]))$$

où F a pour variables libres $x, y, x_1, \dots, x_n$.

1. Montrez que pour toute formule F , $Z \vdash F$ implique $ZF \vdash F$, i.e. que l'on peut prouver n'importe quelle instance du **Schéma de compréhension restreint** en utilisant le **Schéma de remplacement**.
2. (★) On note (a, b) l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Prouvez que cette construction satisfait les propriétés des couples:

$$ZF \vdash \forall aa' bb'. (a, b) = (a', b') \leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$

3. (★) Prouvez que pour tous ensembles a et b , leur produit cartésien $a \times b$ existe, c'est-à-dire:

$$ZF \vdash \forall ab \exists x \forall z. z \in c \leftrightarrow \exists xy. x \in a \wedge y \in b \wedge z = (x, y)$$

4. Comment pourrait-on définir les fonctions?

Exercice 8 — (★) Paradoxe du buveur

Pour B un symbole de prédicat d'arité 1, démontrer la formule suivante en déduction naturelle du premier ordre:

$$\vdash \exists x (B(x) \rightarrow \forall y B(y))$$

On s'autorise à utiliser les règles de de Morgan, la coupure, l'affaiblissement et les différentes règles équivalentes au tiers-exclu.

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 11/03 ou avant par mail.

Exercice 1 — Paradoxe de Russell

On considère un symbole de prédicat $\in$ d'arité 2.

Prouvez $\exists a \forall y. (y \in a \leftrightarrow \neg y \in y) \vdash \perp$.