Corrigé TD 4 — Compacité, incomplétude

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 —— Connexité et compacité

L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas de théorie dont les modèles sont exactement les graphes connexes, autrement dit, la connexité n'est pas définissable dans la logique du premier ordre.

1. Donner une signature et une théorie tels que les modèles de cette théorie sont les graphes.
2. Définir une formule $\varphi_n(x, y)$ telle qu'un graphe G et deux sommets a et b satisfont φ_n si et seulement si a et b sont reliés dans G par un chemin de taille au plus n.
3. Montrer qu'il n'existe pas de théorie $\mathcal{T}$ dont les modèles sont exactement les graphes connexes.

Solution 1

1. Pour les graphes orientés, il suffit d'un symbole de proposition E d'arité deux, représentant les arrêtes, et de la théorie vide. Pour les graphes non orientés, on considère la théorie $\mathcal{T} = \{\forall x.\forall y.\ E(a, b) \to E(b, a)\}$
2. Pour $n = 0$, $\varphi_0 : x = y$, et pour tout $n > 0$ $\varphi_n = \varphi_{n-1}(x, y) \lor \exists z.(\varphi_{n-1}(x, z) \land E(z, y))$.
3. On suppose par contradiction qu'il existe une théorie $\mathcal{T}$ telle que les modèles sont exactement les graphes connexes. Pour tout entier n, on définit $\psi_{n(x,y)}$ comme $\neg\varphi_n$. On considère $\Gamma \coloneqq \mathcal{T} \cup \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On montre que toute partie finie de Γ est satisfiable.

   Soit Γ' un tel ensemble. On dénote n_0 le plus grand entier n tel que φ_n appartient à Γ'.

   Soit γ un graphe à $n_0 + 1$ sommets dénotés $(s_i)_{i\in[\![0,n_0]\!]}$, ayant pour ensemble d'arrêtes

   $$\{(s_i, s_{i+1} \mid i \in [\![0, n_0 - 1]\!])\}$$

   On interprète x et y par s_0 et s_{n_0} respectivement. Le graphe γ est donc un modèle de ψ_n pour tout $n \leq n_0$, et γ est aussi un modèle de $\mathcal{T}$, puisque γ est connexe. Donc γ est un modèle de Γ'. Par compacité, Γ est donc satisfiable, et on choisit un modèle G de Γ. Puisque $G \vDash \Gamma$, en particulier, $G \vDash \mathcal{T}$, donc G est connexe, mais pour tout entier n, $G \vDash \psi_n$, il n'y a donc pas de chemin de taille n de l'interprétation de x à celle de y, et G n'est donc pas connexe. On a donc une absurdité, et une telle théorie n'existe pas.

Exercice 2 —— Relativiser la compacité

On sait qu'il existe une proposition ni prouvable ni réfutable dans l'arithmétique de Peano. On peut donc ajouter cette proposition, ou son contraire, et obtenir une théorie étendue admettant les entiers naturels comme modèle. En itérant, on obtient une séquence de théories comme dans cet exercice; une situation qu'on retrouve aussi dans des arguments de complétude.

Soit $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de théories (pour l'inclusion) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un modèle $\mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{M}_n \vDash \mathcal{T}_n$ mais pas $\mathcal{M}_n \vDash \mathcal{T}_{n+1}$. Soit $\mathcal{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$.

1. Montrez que $\mathcal{T}$ est cohérente.
2. Prouvez qu'il n'existe pas de sous-théorie finie $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}$ ssi $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}'$.

Solution 2

1. On suppose par l'absurde que $\mathcal{T}$ n'est pas cohérente. Ainsi, $\mathcal{T} \vdash \perp$ est prouvable. Soit π une preuve de $\mathcal{T} \vdash \perp$. C'est une preuve finie, elle fait donc intervenir un nombre fini k d'axiomes, portant sur les formules $(\varphi_i)_{i\in[\![0,k-1]\!]}$. On peut donc considérer n_0 le plus petit entier n tel que pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $\varphi_i \in \mathcal{T}_n$ est vérifié. Ainsi, on a $\mathcal{T}_{n_0} \vdash \perp$. Or, par hypothèse, on a l'existence de $\mathcal{M}_n$ tel que $\mathcal{M}_n \vDash \mathcal{T}_n$. Ainsi, $\mathcal{T}_n$ est satisfiable, est la théorie n'est pas incohérente, d'où $\mathcal{T}_{n_0} \nvdash \perp$, on a donc une contradiction.

2. On suppose par l'absurde qu'il existe une sous-théorie finie $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$ telle que pour tout modèle $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}$ ssi $\mathcal{M} \vDash \mathcal{T}'$. Soit h le nombre de formules dans $\mathcal{T}'$, et dénotons $(\varphi_i)_{i\in[\![0,h-1]\!]}$ ces formules. On considère n_1 le plus petit entier n tel que pour tout $i \in [\![0, h-1]\!]$, $\varphi_i \in \mathcal{T}_n$ est vérifié. Ainsi, $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_{n_1}$, d'où $\mathcal{M}_{n_1} \vDash \mathcal{T}'$, mais $\mathcal{M}_{n_1} \nvDash \mathcal{T}_{n_0+1}$ d'où $\mathcal{M}_{n_1} \nvDash \mathcal{T}$, d'où l'absurdité.

Exercice 3 — Lemme d'extension dénombrable

L'objectif de cet exercice est de démontrer le lemme d'extension dans le cas d'une signature dénombrable (dans la preuve de complétude de FO) sans utiliser le lemme de Zorn.

1. Soit Γ un ensemble cohérent de formules, montrer qu'il existe une extension Δ cohérente et complète de Γ.
2. Vérifier que si Γ possède des témoins, alors Δ également.
3. Reprendre la preuve du lemme d'extension et l'adapter dans le cas dénombrable.

Solution 3

1. On considère un ensemble de formules Γ cohérent, sur une signature L dénombrable et on considère $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération des formules sur L. On définit une suite $(\Theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles de formules:

$$\Theta_0 = \Gamma$$

$$\Theta_{n+1} = \begin{cases} \Theta_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si } \Theta_n \cup \{\varphi_n\} \text{ est cohérent} \\ \Theta_n & \text{sinon} \end{cases}$$

   On définit enfin $\Theta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Theta_n$.

   On remarque que $\Gamma \subset \Theta$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, Θ_n est cohérent. Ainsi, Θ est cohérent (même argument que pour exercice 2, question 1). Enfin, Θ est complet. En effet, soit φ une formule, disons $\varphi = \varphi_k$, tel que $\Theta \nvdash \neg\varphi$. On montre que $\Theta \cup \{\varphi\}$ est cohérent par contraposée. On suppose donc que $\Theta \cup \{\varphi\}$ est incohérent, on a donc une preuve de faux, d'où on peut déduire une preuve π de $\Theta\varphi, \neg\varphi$. Ainsi, on obtient la preuve de $\Theta \vdash \neg\varphi$:

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi \vee \varphi}\,\mathrm{TE} \qquad \dfrac{\pi}{\Theta, \varphi \vdash \neg\varphi} \qquad \dfrac{}{\Theta, \neg\varphi \vdash \neg\varphi}\,\mathrm{ax}}{\Theta \vdash \neg\varphi}\,\vee_e$$

   On a donc bien que $\Theta \cup \{\varphi\}$ est cohérent, donc $\Theta_n \cup \{\varphi\}$ est cohérent, donc φ est dans Θ_{n+1}, donc dans Θ, et $\Theta \vdash \varphi$ par axiome.

   On pose $\Delta = \Theta$.

2 et 3. Arguments similaire au cours: On construit des extensions Γ' et L' en ajoutant des constantes pour les formules créées.

Définition — Formules rudimentaires

L'ensemble des formules rudimentaires R est definie par induction par les règles suivantes:

- les formules atomiques sont dans R
- Si $A, B \in R$ alors $A \wedge B \in R$
- Si $A, B \in R$ alors $A \vee B \in R$
- Si $A \in R$ alors $\neg A \in R$
- Si $A \in R$ et t est un terme où x n'apparaît pas, alors $\forall x < t, A \in R$
- Si $A \in R$ et t est un terme où x n'apparaît pas, alors $\exists x < t, A \in R$

Exercice 4 —— Formules ∃-rudimentaires

On appelle les formules ∃-rudimentaires (resp. ∀-rudimentaires), les formules de la forme $\exists x, A$ (resp. $\forall x, A$) pour $A \in R$. On note l'ensemble des formules ∃-rudimentaires $R_\exists$

- Montrer que les quantificateurs $\forall x \leq t$ et $\exists x \leq t$ peuvent être ajoutés dans la définition des formules rudimentaires
- Montrer qu'une formule ∀-rudimentaire est equivalente à la négation d'une formule ∃-rudimentaire
- Exprimer le théorème de Lagrange (tout entier est la somme de 4 carrés) comme une formule ∀ -rudimentaire
- On admettra que toute formule ∃-rudimentaire est correcte si et seulement si, elle est démontrable dans Q. Prouver cependant les lemmes intermédiaires suivants:
  1. Pour tout i, $\underset{Q}{\vdash} \forall x(x < \boldsymbol{i} \to x = \boldsymbol{o} \vee \dots \vee x = \boldsymbol{i} \boldsymbol{—} \mathbf{1})$
  2. Pour tout i, $\underset{Q}{\vdash} \forall x(\boldsymbol{i} < x \to x = \boldsymbol{i}' \vee \boldsymbol{i}' < x)$

  (Un autre lemme est en contrôle continu)

Exercice 5 —— Formules ∃-rudimentaires généralisées (⋆)

Définition —— Formules ∃-rudimentaires généralisées

L'ensemble des formules ∃-rudimentaires généralisées $R_\exists^G$ est defini par induction:

- $R_\exists \subset R_\exists^G$
- Si $A, B \in R_\exists^G$ alors $A \wedge B \in R_\exists^G$ et $A \vee B \in R_\exists^G$
- Si $A \in R_\exists^G$ et t est un terme où x n'apparaît pas, alors $\forall x < t, A \in R_\exists^G$
- Si $A \in R_\exists^G$ et t est un terme où x n'apparaît pas, alors $\exists x < t, A \in R_\exists^G$
- Si $A \in R_\exists^G$, alors $\exists x, A \in R_\exists^G$

- Montrer que les formules ∃-rudimentaires sont equivalentes aux formules ∃-rudimentaires généralisé. Dans le sens, où pour toute formule $A \in R_\exists^G$, il existe une formule equi-satisfiable dans $R_\exists$ (l'equi-satisfiabilité n'est pas nécéssairement démontrable dans Q néanmoins)

Exercice 6 —— Fonctions définissables dans Q

Nous allons montrer que les fonctions récursives sont représentable dans Q. Pour cela utiliser les formules ∃-rudimentaires généralisées, et:

1. Montrer que la fonction $\mathbf{0} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ constante à 0 est représentable (en FO).
2. Montrer que la fonction successeur est représentable.
3. Montrer que les fonctions projections sont représentables.
4. Montrer que, pour f et $(g_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ représentables, alors $f \circ \langle (g_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \rangle$ est représentable.
5. Même question pour la minimisation.
6. Même question pour la récursion primitive $(\star)$ (indice: utiliser le théorème des restes chinois).
7. Conclure en utilisant les exercices précédents.

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 25/03 ou avant par mail.

Exercice 1

Montrer dans Q que pour tout $\boldsymbol{i}$, $\underset{Q}{\vdash} \forall x(\boldsymbol{i} < x \vee x = \boldsymbol{i} \vee x < \boldsymbol{i})$, sans utiliser le théorème de l'exercice 3.

Solution 4

On procède par récurrence sur i. Par soucis de place, on note $\varphi_i(x) := (\boldsymbol{i} < x \vee x = \boldsymbol{i} \vee x < \boldsymbol{i})$, et $\psi_i(x) := (x = \boldsymbol{i} \vee x < \boldsymbol{i})$

$i = 0$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x.(x+\mathbf{0}=x)}\,Q4}{\vdash_{\mathtt{Q}} y_1'+\mathbf{0}=y_1'}\,\forall_e}{\vdash_{\mathtt{Q}} y_1'=y_1'+\mathbf{0}}\,\text{sym} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}}\neg x_1=\mathbf{0}}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\vdash_{\mathtt{Q}} \forall x.(\neg x=\mathbf{0}\to\exists y.x=y')}\,Q3}{\vdash_{\mathtt{Q}} \neg x_1=\mathbf{0}\to\exists y.x_1=y'}\,\forall_e}{\neg x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}}\exists y.x_1=y'}\,\to_e}{\neg x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}} x_1=y_1'}\,\exists_e}{\neg x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}} x_1=y_1'+\mathbf{0}}\,\text{trans}}{\neg x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}} y_1'+\mathbf{0}=x_1}\,\text{sym}}{\dfrac{\neg x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}} \mathbf{0}<x_1}{\pi}}\,\exists_i(a<b=\exists y.y'+a=b)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}} x=\mathbf{0}}\,\text{ax}}{x_1=0\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_0(x_1)}\,\vee_i\times 2 \qquad \dfrac{\pi}{\neg x_1=\mathbf{0}\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_0(x_1)}\,\vee_i\times 2 \qquad \dfrac{}{\vdash_{\mathtt{Q}} x=\mathbf{0}\vee\neg x=\mathbf{0}}\,\text{TE}}{\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_0(x_1)}\,\vee_e}{\vdash_{\mathtt{Q}}\forall x\varphi_0(x)}\,\forall_i$$

$i > 0$, On suppose donc $\dfrac{}{\vdash_{\mathtt{Q}}\forall x\varphi_i(x)}\,\text{Hyp}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\boldsymbol{i}<x_1\vdash_{\mathtt{Q}}\boldsymbol{i}<x_1}\,\text{ax} \quad \dfrac{\text{exo 4}}{\boldsymbol{i}<x\to x=\boldsymbol{i'}\vee\boldsymbol{i'}<x}}{\boldsymbol{i}<x_1\vdash_{\mathtt{Q}}\boldsymbol{i'}<x_1\vee x_1=\boldsymbol{i'}}\,\to_e}{\boldsymbol{i}<x_1\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_{i'}(x_1)}\,\vee_i \qquad \dfrac{\pi'}{x_1=\boldsymbol{i}\vee x_1<\boldsymbol{i}\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_{i'}(x_1)}\,\vee_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\vdash_{\mathtt{Q}}\forall x\varphi_i(x)}\,\text{Hyp}}{\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_i(x_1)}\,\forall_e}{\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_{i'}(x_1)}\,\vee_e}{\vdash_{\mathtt{Q}}\forall x\varphi_{i'}(x)}\,\forall_i$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\psi_{i(x_1)}\vdash_{\mathtt{Q}}\psi_{i(x_1)}}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{lemma}}{\vdash_{\mathtt{Q}}\boldsymbol{j}<\boldsymbol{i'}}}{x=\boldsymbol{j}\vdash_{\mathtt{Q}} x<\boldsymbol{i'}}\,\text{sym, subst} \quad \dfrac{\text{exo 4}}{x<\boldsymbol{i}\vdash_{\mathtt{Q}}\bigvee_{j\in[\![0,i-1]\!]}x=\boldsymbol{j}}}{x_1<\boldsymbol{i}\vdash_{\mathtt{Q}} x_1<\boldsymbol{i'}}\,\vee_e\,(\times i)}{x_1<\boldsymbol{i}\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_{i'}(x_1)}\,\vee_i\,(\times 2) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{lemma}}{\vdash_{\mathtt{Q}}\boldsymbol{i}<\boldsymbol{i'}}}{x_1=\boldsymbol{i}\vdash_{\mathtt{Q}} x_1<\boldsymbol{i'}}\,\text{subst}}{x_1=\boldsymbol{i}\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_{i'}(x_1)}\,\vee_i}{\dfrac{x_1=\boldsymbol{i}\vee x_1<\boldsymbol{i}\vdash_{\mathtt{Q}}\varphi_{i'}(x_1)}{\pi'}}\,\vee_e$$

Il ne reste que à démontrer le lemme tel que si $i<j$, alors $\vdash_{\mathtt{Q}}\boldsymbol{i}<\boldsymbol{j}$, par récurrence sur i et j.