

TD 4 – Modèles, Correction, Cohérence

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Théo Vignon theo.vignon@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Démontrer la non-démontrabilité

Soit un langage $\mathcal{L}$ contenant un symbole de fonction 0-aire c et un prédicat unaire P .

1. Est-ce que $P(c)$ est valide dans tout modèle de $\mathcal{L}$?
2. Est-ce que $\neg P(c)$ est valide dans tout modèle de $\mathcal{L}$?
3. Est-ce que $P(c) \vee \neg P(c)$ est valide dans tout modèle de $\mathcal{L}$?

Exercice 2 — Preuves en vrac

Les propositions suivantes sont-elles démontrables ? Donnez une dérivation, une preuve de validité sémantique, ou un contre-modèle.

1. $\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$
2. $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
3. $\vdash \exists x \exists y \top$
4. $\vdash \exists x \forall y (T(x) \Rightarrow T(y))$
5. $\forall x (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\forall x T(x) \Rightarrow \forall x R(x))$
6. $\exists x (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\forall x T(x) \Rightarrow \exists x R(x))$
7. $\exists x (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\exists x T(x) \Rightarrow \exists x R(x))$

Exercice 3 — Règle admissible, 2.0

Prouver que la règle d'affaiblissement est admissible.

Exercice 4 — It's just a theory; an equality theory.

Définition — La théorie de l'égalité $\mathcal{E}$

$$\begin{cases} \forall x (x = x) \\ \forall x_1 \dots \forall x_i \forall x'_i \dots \forall x_n (x_i = x'_i \Rightarrow f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)) \\ \forall x_1 \dots \forall x_j \forall x'_j \dots \forall x_m (x_j = x'_j \Rightarrow P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m) \Rightarrow P(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_m)) \end{cases} \quad \text{Pour tout symbole de fonction } f \in \mathcal{F} \text{ et prédicat } P \in \mathcal{P}.$$

Soit $\mathcal{M}$ un modèle de la théorie de l'égalité. On note $\sim$ la relation binaire $\mathcal{M}_s$ définie par :

$$x \sim y \text{ iff } (x, y) \in \overline{\mathcal{M}_s}$$

1. En notant que la symétrie, réflexivité, et transitivité sont démontrables dans la théorie de l'égalité (cf TD3), montrez que $\sim$ est une relation d'équivalence.
 1. Prouvez que l'on peut définir un « modèle quotient », càd un modèle $\mathcal{M}/\sim$ tel que pour toute formule A et valuation σ : $\mathcal{M}, \sigma \models A$ iff $\mathcal{M}/\sim, [\sigma] \models A$ où $[\sigma](x) = [\sigma(x)]$, i.e. la classe d'équivalence de $\sigma(x)$ pour la relation $\sim$.
 1. Montrez que dans ce modèle quotient, l'égalité est interprétée comme l'égalité mathématique. On appelle un tel modèle un *modèle égalitaire*.
 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire une formule A_n telle que pour tout modèle égalitaire $\mathcal{M}$ de A_n , $|\mathcal{M}_s| = n$.

Exercice 5 — Arithmétique

On se place sur le langage de l'arithmétique de Peano.

Définition — Arithmétique de Peano

Les axiomes de PA sont les axiomes de l'égalité et:

$$\begin{aligned} \forall x \ 0 + x &= x \\ \forall x \forall y \ S(x) + y &= S(x + y) \\ \forall x \ 0 \times x &= 0 \\ \forall x \forall y \ S(x) \times y &= (x \times y) + y \\ \forall x \exists y \ x &= 0 \vee x = S(y) \\ \forall x \neg S(x) &= 0 \\ \forall x \forall y \ S(x) = S(y) &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Schéma de récurrence : pour toute formule A dont les variables libres sont incluses dans $x, x_1, \dots, x_n$:

$$\forall x_1 \dots \forall x_n (0/x)A \Rightarrow \forall y. ((y/x)A \Rightarrow (S(y)/x)A) \Rightarrow \forall y. (y/x)A$$

Soit $\mathcal{M}_1$ le modèle défini par $\mathcal{M}_1 = \mathbb{N}$, munie de

- $0_{\mathcal{M}_1}$ l'entier naturel 0,
- la fonction $s_{\mathcal{M}_1}$ du successeur sur $\mathbb{N}$,
- la fonction $+_{\mathcal{M}_1}$ de l'addition sur $\mathbb{N}$,
- la fonction $\times_{\mathcal{M}_1}$ de la multiplication sur $\mathbb{N}$,
- la relation binaire $\equiv_{\mathcal{M}_1}$ de l'égalité sur $\mathbb{N}$ pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $(n, p) \in \equiv_{\mathcal{M}_1}$ si et seulement si $n = p$.

1. $\mathcal{M}_1$ est-il un modèle de PA?
2. $\mathcal{M}_1$ est-il un modèle des formules $\forall x \forall y \exists z (x + z = y)$ et $\forall x \forall y (x + y = y + x)$?
3. Mêmes questions pour le modèle $\mathcal{M}_2$ défini par $\mathcal{M}_2 = \mathbb{Z}$, $0_{\mathcal{M}_2}$ l'entier 0, $s_{\mathcal{M}_2}$ le successeur sur $\mathbb{Z}$, $+_{\mathcal{M}_2}$ l'addition sur $\mathbb{Z}$, $\times_{\mathcal{M}_2}$ la multiplication sur $\mathbb{Z}$, et $\equiv_{\mathcal{M}_2}$ l'égalité sur $\mathbb{Z}$.

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des axiomes PA où on a enlevé les axiomes de la multiplication et le schéma de récurrence.

4. Exhiber un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ tel qu'il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que pour tout n , $x \neq s_{\mathcal{M}}^n(0_{\mathcal{M}})$.
5. Exhiber un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{E}$ qui n'est pas un modèle de $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.
6. Les formules suivantes sont-elles prouvables dans $\mathcal{E}$?
 1. $P(0), \forall x P(x) \Rightarrow P(S(x)) \vdash P(S(S(S(0))))$.
 2. $P(0), \forall x P(x) \Rightarrow P(S(x)) \vdash \forall x P(x)$.

Définition — Axiome Indépendent

Un axiome A est *indépendant* d'une théorie $\mathcal{T}$ si et seulement si, les sequents $\mathcal{T} \vdash A$ et $\mathcal{T} \not\vdash A$ ne sont pas démontrable.

6. Montrez que le schéma d'induction est indépendant des autres axiomes de PA.

Exercice 6 — Une théorie des ensembles finis

Donnez un modèle de $\text{ZF} \setminus \{\text{Infinity}\}$ dans lequel tous les ensembles sont finis. Concluez l'indépendance de l'axiome de l'infini du reste des axiomes de ZF.