TD 4: Büchi automata, CTL
Solutions

Exercice 1

The models satisfying the formulas are the following:

1. $\mathsf{AG}\,\mathsf{AF}q$: M_2
2. $\mathsf{EG}\,\mathsf{EF}q$: M_1, M_2, M_3
3. $\mathsf{AF}\,\mathsf{EG}p$: M_1
4. $\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}q$: M_1, M_2, M_3

Exercice 2

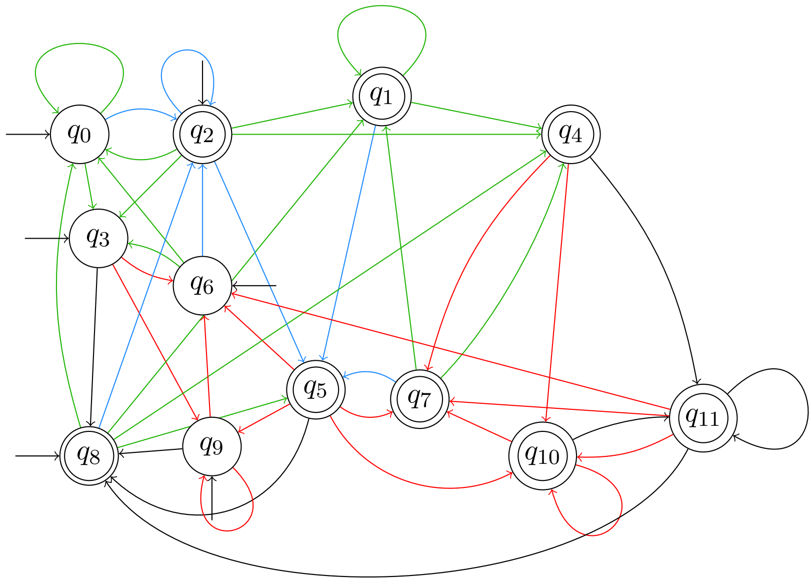
1. $\mathsf{A}\,\mathsf{G}(\mathsf{E}\,\mathsf{F}\,p) \Rightarrow \mathsf{E}\,\mathsf{F}\,p$
2. $\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,q \vee (\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,p \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{F}\,q) \not\equiv \mathsf{E}(p\,\mathsf{U}\,q)$.

Exercice 3

1. $\varphi = a\,\mathsf{U}\,(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a)$.
   $S_\varphi = \{a, b, \mathsf{X}\,b, \mathsf{X}\,b \wedge \neg a, \varphi, \neg a, \neg b, \neg\,\mathsf{X}\,b, \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), \neg\varphi\}$

$$
\begin{array}{llllll}
q_0 & = \{ & a, & b, & \mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \varphi\} \\
q_1 & = \{ & a, & b, & \mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \neg\varphi\} \\
q_2 & = \{ & \neg a, & b, & \mathsf{X}\,b, & \mathsf{X}\,b \wedge \neg a, & \varphi\} \\
q_3 & = \{ & a, & b, & \neg\,\mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \varphi\} \\
q_4 & = \{ & a, & b, & \neg\,\mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \neg\varphi\} \\
q_5 & = \{ & \neg a, & b, & \neg\,\mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \neg\varphi\} \\
q_6 & = \{ & a, & \neg b, & \mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \varphi\} \\
q_7 & = \{ & a, & \neg b, & \mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \neg\varphi\} \\
q_8 & = \{ & \neg a, & \neg b, & \mathsf{X}\,b, & \mathsf{X}\,b \wedge \neg a, & \varphi\} \\
q_9 & = \{ & a, & \neg b, & \neg\,\mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \varphi\} \\
q_{10} & = \{ & a, & \neg b, & \neg\,\mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \neg\varphi\} \\
q_{11} & = \{ & \neg a, & \neg b, & \neg\,\mathsf{X}\,b, & \neg(\mathsf{X}\,b \wedge \neg a), & \neg\varphi\}
\end{array}
$$

   red arrows are labelled by $\{a\}$, blue by $\{b\}$, green by $\{a, b\}$, and black by $\emptyset$



Exercice 4

1.
$$\mathsf{E}\left((a_1 \wedge a_2) \,\mathsf{U}\, (b_1 \wedge \mathsf{E}(a_2 \,\mathsf{U}\, b_2))\right) \vee \mathsf{E}\left((a_1 \wedge a_2) \,\mathsf{U}\, (b_2 \wedge \mathsf{E}(a_1 \,\mathsf{U}\, b_1))\right)$$

2.
$$\bigvee_{\pi \text{ permutation of } \{1,\ldots,n\}} \mathsf{E}\left(\bigwedge_{i} \psi_i \wedge \varphi \,\mathsf{U}\, (\psi'_{\pi_1} \wedge \mathsf{E}(\bigwedge_{i \neq \pi_1} \psi_i \wedge \varphi \,\mathsf{U}\, (\psi'_{\pi_2} \wedge \mathsf{E}(\bigwedge_{i \neq \pi_1, \pi_2} \psi_i \wedge \varphi \,\mathsf{U}\, (\psi'_{\pi_3} \wedge \cdots \mathsf{U}\, (\psi'_{\pi_n} \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{G}\,\varphi))))\right)$$

of size $O(n!)$.

3.
$$\mathsf{E}(\mathsf{X}\, a \wedge (b \,\mathsf{U}\, c)) \equiv (c \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{X}\, a) \vee (b \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{X}(a \wedge \mathsf{E}(b \,\mathsf{U}\, c)))$$

4.
$$\bigvee_{S \in 2^{\{1,\ldots,n\}}} \left(\bigwedge_{i \in S} \psi'_i \wedge \bigwedge_{i \notin S} \psi_i \wedge \varphi' \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{X}(\varphi \wedge \mathsf{E}(\bigwedge_{i \notin S} \psi_i \,\mathsf{U}\, \psi'_i \wedge \mathsf{G}\,\varphi'))\right)$$

provides CTL$^+$ formula of size $O(2^n)$.

5.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{A}((\mathsf{F}\,a \lor \mathsf{X}\,a \lor \mathsf{X}\,\neg b \lor \mathsf{F}\,\neg d) \land (d\,\mathsf{U}\,\neg c)) \\
&\equiv \neg\,\mathsf{E}\,\neg((\mathsf{F}\,a \lor \mathsf{X}\,a \lor \mathsf{X}\,\neg b \lor \mathsf{F}\,\neg d) \land (d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\mathsf{A}\,\varphi \equiv \neg\,\mathsf{E}\,\neg\varphi) \\
&\equiv \neg\,\mathsf{E}(\neg(\mathsf{F}\,a \lor \mathsf{X}\,a \lor \mathsf{X}\,\neg b \lor \mathsf{F}\,\neg d) \lor \neg(d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\text{De Morgan}) \\
&\equiv \neg\,\mathsf{E}((\neg\,\mathsf{F}\,a \land \neg\,\mathsf{X}\,a \land \neg\,\mathsf{X}\,\neg b \land \neg\,\mathsf{F}\,\neg d) \lor \neg(d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\text{DeMorgan}) \\
&\equiv \neg\,\mathsf{E}((\mathsf{G}\,\neg a \land \mathsf{X}\,\neg a \land \mathsf{X}\,b \land \mathsf{G}\,d) \lor \neg(d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\neg\,\mathsf{F}\,\neg\varphi \equiv \mathsf{G}\,\varphi \text{ et } \neg\,\mathsf{X}\,\varphi \equiv \mathsf{X}\,\neg\varphi) \\
&\equiv \neg\,\mathsf{E}((\mathsf{G}\,\neg a \land \mathsf{X}\,\neg a \land \mathsf{X}\,b \land \mathsf{G}\,d) \lor ((d \land c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \land c)) \lor \mathsf{G}\,c) \\
& && (\neg(\varphi\,\mathsf{U}\,\psi) \equiv ((\varphi \land \neg\psi)\,\mathsf{U}\,(\neg\varphi \land \neg\psi)) \lor \mathsf{G}\,\neg\psi) \\
&\equiv \neg\,\mathsf{E}(\mathsf{G}\,\neg a \land \mathsf{X}\,\neg a \land \mathsf{X}\,b \land \mathsf{G}\,d) \land \neg\,\mathsf{E}((d \land c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \land c)) \land \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,c \\
& && (\mathsf{E}(\varphi \lor \psi) \equiv \mathsf{E}\,\varphi \lor \mathsf{E}\,\psi) \\
&\equiv \neg\,\mathsf{E}(\mathsf{G}(\neg a \land d) \land \mathsf{X}(\neg a \land b)) \land \neg\,\mathsf{E}((d \land c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \land c)) \land \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,c \\
& && (\mathsf{G}\,\varphi \land \mathsf{G}\,\psi \equiv \mathsf{G}(\varphi \land \psi) \text{ et } \mathsf{X}\,\varphi \land \mathsf{X}\,\psi \equiv \mathsf{X}(\varphi \land \psi)) \\
&\equiv (a \lor \neg d \lor \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{X}(\neg a \land b \land \mathsf{E}\,\mathsf{G}(\neg a \land d))) \land \neg\,\mathsf{E}((d \land c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \land c)) \land \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,c \\
& && (\text{equ. (2)})
\end{aligned}
$$