TD 5 — Calcul des séquents

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Preuves en calcul des séquents

Soient a et b des symboles de proposition d'arité zéro, et r un symbole de proposition d'arité 1. Donnez des preuves dans le calcul des séquents des formules suivantes:

1. $a \vee (a \to b)$
2. $((a \to b) \to a) \to a$
3. $\neg\neg a \to a$
4. $\neg \forall x, r(x) \Leftrightarrow \exists x, \neg r(x)$
5. $\exists x, [(r(a) \vee r(b)) \to r(x)]$
6. Montrez que si $a \neq b$, alors il n'existe pas de preuve de 5. qui n'utilise pas de contractions.

Exercice 2 — LK avec coupures

On étudie le calcul des séquents avec coupures. Dans la suite, P, Q sont des symboles de prédicats unaires.

1. Démontrez la formule $\varphi_a = \exists x.(P(x) \to \forall y.P(y))$ dans le calcul des séquents.

   Astuce : Faire une coupure sur $\forall x.P(x) \vee \exists x.\neg P(x)$.

2. Supprimez les coupures dans la preuve suivante. Détaillez les étapes.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi, \psi, \psi \vee \varphi$}
\RightLabel{$\vee_R$}
\UnaryInfC{$\varphi \vdash \varphi \vee \psi, \psi \vee \varphi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \varphi \vdash \varphi, \psi$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\varphi, \psi \vdash \varphi, \psi$}
\RightLabel{$\vee_L$}
\BinaryInfC{$\varphi, \varphi \vee \psi \vdash \psi, \varphi$}
\RightLabel{$\vee_R$}
\UnaryInfC{$\varphi, \varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi$}
\RightLabel{cut}
\BinaryInfC{$\varphi \vdash \psi \vee \varphi$}
\end{prooftree}
$$

Méthode — Comment éliminer une coupure

D'abord, un point rapide sur comment appliquer la procédure d'élimination des coupures.

Le but est de faire remontrer les coupures dans la preuve, ou de les remplacer par des coupures sur des formules plus petites. Cela jusqu'au moment où elles peuvent être remplacées par des règles structurelles (les contractions et la règle d'axiome). Il y a trois cas principaux, qui vont dépendre des premières règles des deux preuves au-dessus de la coupure :

a) Les deux règles sont appliquées à la formule introduite par la règle de coupure : On sépare la coupure en coupures sur des sous-formules de la formule initiale. (Voir les slides du cours pour plus de détails).

   Remarque: lorsque les deux règles sont des axiomes, il est possible de finir directement avec la règle d'axiome

b) L'une des règles n'est pas appliquée à la formule introduite par la coupure : On peut commuter la coupure avec cette règle.

   Remarque: si cette règle est la règle d'axiome, on peut également finir directement

c) L'une des règles est une règle d'axiome sur la formule introduite par la coupure : On peut remplacer la coupure par une règle d'axiome (si l'autre est également une règle d'axiome) ou une contraction.

3. Existe-t-il un terme t tel que $\vdash P(t) \to \forall y.P(y)\}$?
4. Eliminez les coupures dans la preuve de la question 1 (Pas besoin de détailler la procédure cette fois-ci).

Exercice 3 —— Construction de Gödel

L'objectif de cet exercice est de construire une formule G telle que ni G, ni $\neg G$ ne soient démontrables dans $\mathtt{PA}$.

Soit w une variable. Soit f la fonction recursive telle que $f(n,p,q) = 1$ si $n = \lceil \pi \rceil, p = \lceil A \rceil$, et π est une preuve dans l'arithmétique de $(q/w)A$, sinon $f(n,p,q) = 0$.

Soient $F[x_1, x_2, x_3, y]$ la proposition représentant f et $T \stackrel{\{\mathrm{def}\}}{=} \forall x.\, \neg F[x, w, w, 1]$. Soient $m = \lceil T \rceil$ et G la proposition close $(m/w)T$.

1. Montrez que si G est prouvable dans $\mathtt{PA}$, alors G n'est pas prouvable dans $\mathtt{PA}$.
2. En admettant que $\mathtt{PA}$ est ω-cohérente, montrez que si $\neg G$ est prouvable dans $\mathtt{PA}$, alors G aussi.
3. Conclure.

Exercice 4 —— Une autre théorie des nombres($\star$)

Preuves constructives et négations

Prouvez que $\vdash_{\mathtt{LJ}} A \to \neg\neg A$ et $\vdash_{\mathtt{LJ}} \neg\neg\neg A \to \neg A$. Tracez le graphe avec pour sommets les $\neg^k A$ pour $k \in \mathbb{N}$ et pour arêtes les implications prouvables constructivement. Quelles arrêtes sont ajoutées dans le cas classique ?

Propriétés constructives

1. Prouvez que si $\vdash_{\mathtt{LJ}} \exists x.A$, alors il existe un terme t tel que $\vdash_{\mathtt{LJ}} (x/t)A$.
2. Prouvez que si $\vdash_{\mathtt{LJ}} \forall x \exists y.A$, alors il existe une fonction f des termes clos vers les termes telle que pour tout terme t, $\vdash_{\mathtt{LJ}} (y/f(t), x/t)A$.
3. Prouvez que $\exists x.(B(x) \to \forall y.B(y))$ n'est pas démontrable dans $\mathtt{LJ}$.

Traduction par double négation

On définit sa traduction de GÖDEL (ou traduction par double négation) d'une formula A par induction structuelle:

- si A est atomique, $\mathcal{G}(A) = \neg\neg A$
- $\mathcal{G}(\top) = \top$
- $\mathcal{G}(\bot) = \bot$
- $\mathcal{G}(\neg A) = \neg \mathcal{G}(A)$
- $\mathcal{G}(A_1 \wedge A_2) = \mathcal{G}(A_1) \wedge \mathcal{G}(A_2)$
- $\mathcal{G}(A_1 \vee A_2) = \neg\neg(\mathcal{G}(A_1) \vee \mathcal{G}(A_2))$
- $\mathcal{G}(A_1 \to A_2) = \mathcal{G}(A_1) \to \mathcal{G}(A_2)$
- $\mathcal{G}(\forall x.A) = \forall x.\mathcal{G}(A)$
- $\mathcal{G}(\exists x.A) = \neg\neg\exists x.\mathcal{G}(A)$

Si Γ est un ensemble de formules, on écrit $\mathcal{G}(\Gamma)$ l'ensemble $\{\mathcal{G}(A) \mid A \in \Gamma\}$. Le but de l'exercice est de prouver l'équivalence entre $\Gamma \vdash_{\mathtt{LK}} A$ et $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_{\mathtt{LJ}} \mathcal{G}(A)$.

1. Prouvez que pour toute formule A, $\vdash_{\mathtt{LJ}} \neg\neg\mathcal{G}(A) \to \mathcal{G}(A)$. (Au moins les cas $\neg$; $\wedge$; $\exists$).
   Vous pouvez utiliser le fait que $\neg\neg(A \wedge B) \to (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$ est démontrable constructivement.
2. Montrez que pour toute formule A, si $\Gamma \vdash_{\mathtt{LK}} A$ alors $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_{\mathtt{LJ}} \mathcal{G}(A)$.
   Essayez de traiter au moins les cas : introduction de $\wedge$ et de $\vee$; élimination de $\vee$; $\mathtt{RAA}$.
3. Montrez que pour toute formule A, $\vdash_{\mathtt{LK}} A \Leftrightarrow \mathcal{G}(A)$.
4. Montrez que pour toute formule A, si $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_{\mathtt{LJ}} \mathcal{G}(A)$ alors $\Gamma \vdash_{\mathtt{LK}} A$.

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 01/04 ou avant par mail, sous la forme Nom_Prenom_Numero (ou similaire).

Exercice 1 —— Calcul des séquents

Soient a, b, c et q des symboles de proposition d'arité zéro, et r un symbole de prédicate unaire. Prouvez les formules suivates en calcul des séquents:

1. $a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
2. $\neg(a \vee b) \Leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$
3. $\forall x, (q \vee r(x)) \to (q \vee \forall x, r(x))$