TD 5: CTL
Solutions

Exercice 1

The models satisfying the formulas are the following:

1. $\mathsf{AG}\,\mathsf{AF}q$: M_2
2. $\mathsf{EG}\,\mathsf{EF}q$: M_1, M_2, M_3
3. $\mathsf{AF}\,\mathsf{EG}p$: M_1, M_2
4. $\mathsf{AG}\,\mathsf{EF}q$: M_1, M_2, M_3

Exercice 2

1. $\mathsf{A}\,\mathsf{G}(\mathsf{E}\,\mathsf{F}\,p) \Rightarrow \mathsf{E}\,\mathsf{F}\,p$
2. $\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,q \vee (\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,p \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{F}\,q) \not\equiv \mathsf{E}(p\,\mathsf{U}\,q)$.

Exercice 3

1. $$\mathsf{E}\left((a_1 \wedge a_2)\,\mathsf{U}\,(b_1 \wedge \mathsf{E}(a_2\,\mathsf{U}\,b_2))\right) \vee \mathsf{E}\left((a_1 \wedge a_2)\,\mathsf{U}\,(b_2 \wedge \mathsf{E}(a_1\,\mathsf{U}\,b_1))\right)$$

2. $$\bigvee_{\pi \text{ permutation of } \{1,\ldots,n\}} \mathsf{E}\left(\bigwedge_i \psi_i \wedge \varphi\,\mathsf{U}\,(\psi'_{\pi_1} \wedge \mathsf{E}(\bigwedge_{i\neq\pi_1} \psi_i \wedge \varphi\,\mathsf{U}\,(\psi'_{\pi_2} \wedge \mathsf{E}(\bigwedge_{i\neq\pi_1,\pi_2} \psi_i \wedge \varphi\,\mathsf{U}\,(\psi'_{\pi_3} \wedge \cdots \mathsf{U}\,(\psi'_{\pi_n} \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{G}\,\varphi))))\right)$$

   of size $O(n!)$.

3. $$\mathsf{E}(\mathsf{X}\,a \wedge (b\,\mathsf{U}\,c)) \equiv (c \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{X}\,a) \vee (b \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{X}(a \wedge \mathsf{E}(b\,\mathsf{U}\,c)))$$

4. $$\bigvee_{S\in 2^{\{1,\ldots,n\}}} \left(\bigwedge_{i\in S} \psi'_i \wedge \bigwedge_{i\notin S} \psi_i \wedge \varphi' \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{X}(\varphi \wedge \mathsf{E}(\bigwedge_{i\notin S} \psi_i\,\mathsf{U}\,\psi'_i \wedge \mathsf{G}\,\varphi'))\right)$$

   provides CTL$^+$ formula of size $O(2^n)$.

5.

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{A}((\mathsf{F}\,a \vee \mathsf{X}\,a \vee \mathsf{X}\,\neg b \vee \mathsf{F}\,\neg d) \wedge (d\,\mathsf{U}\,\neg c)) \\
\equiv\ & \neg\,\mathsf{E}\,\neg((\mathsf{F}\,a \vee \mathsf{X}\,a \vee \mathsf{X}\,\neg b \vee \mathsf{F}\,\neg d) \wedge (d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\mathsf{A}\,\varphi \equiv \neg\,\mathsf{E}\,\neg\varphi) \\
\equiv\ & \neg\,\mathsf{E}(\neg(\mathsf{F}\,a \vee \mathsf{X}\,a \vee \mathsf{X}\,\neg b \vee \mathsf{F}\,\neg d) \vee \neg(d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\text{De Morgan}) \\
\equiv\ & \neg\,\mathsf{E}((\neg\,\mathsf{F}\,a \wedge \neg\,\mathsf{X}\,a \wedge \neg\,\mathsf{X}\,\neg b \wedge \neg\,\mathsf{F}\,\neg d) \vee \neg(d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\text{DeMorgan}) \\
\equiv\ & \neg\,\mathsf{E}((\mathsf{G}\,\neg a \wedge \mathsf{X}\,\neg a \wedge \mathsf{X}\,b \wedge \mathsf{G}\,d) \vee \neg(d\,\mathsf{U}\,\neg c)) && (\neg\,\mathsf{F}\,\neg\varphi \equiv \mathsf{G}\,\varphi \text{ et } \neg\,\mathsf{X}\,\varphi \equiv \mathsf{X}\,\neg\varphi) \\
\equiv\ & \neg\,\mathsf{E}((\mathsf{G}\,\neg a \wedge \mathsf{X}\,\neg a \wedge \mathsf{X}\,b \wedge \mathsf{G}\,d) \vee ((d \wedge c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \wedge c)) \vee \mathsf{G}\,c) \\
& && (\neg(\varphi\,\mathsf{U}\,\psi) \equiv ((\varphi \wedge \neg\psi)\,\mathsf{U}\,(\neg\varphi \wedge \neg\psi)) \vee \mathsf{G}\,\neg\psi) \\
\equiv\ & \neg\,\mathsf{E}(\mathsf{G}\,\neg a \wedge \mathsf{X}\,\neg a \wedge \mathsf{X}\,b \wedge \mathsf{G}\,d) \wedge \neg\,\mathsf{E}((d \wedge c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \wedge c)) \wedge \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,c \\
& && (\mathsf{E}(\varphi \vee \psi) \equiv \mathsf{E}\,\varphi \vee \mathsf{E}\,\psi) \\
\equiv\ & \neg\,\mathsf{E}(\mathsf{G}(\neg a \wedge d) \wedge \mathsf{X}(\neg a \wedge b)) \wedge \neg\,\mathsf{E}((d \wedge c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \wedge c)) \wedge \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,c \\
& && (\mathsf{G}\,\varphi \wedge \mathsf{G}\,\psi \equiv \mathsf{G}(\varphi \wedge \psi) \text{ et } \mathsf{X}\,\varphi \wedge \mathsf{X}\,\psi \equiv \mathsf{X}(\varphi \wedge \psi)) \\
\equiv\ & (a \vee \neg d \vee \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{X}(\neg a \wedge b \wedge \mathsf{E}\,\mathsf{G}(\neg a \wedge d))) \wedge \neg\,\mathsf{E}((d \wedge c)\,\mathsf{U}\,(\neg d \wedge c)) \wedge \neg\,\mathsf{E}\,\mathsf{G}\,c \\
& && (\text{equ. (2)})
\end{aligned}
$$