TD 6 — Logique intuitionniste, mondes de Kripke

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 —— Modèles IQC

Construisez des contres-modèles pour les formules suivantes:
- $\neg P \vee \neg\neg P$
- $\neg\neg P \to (\neg P \vee P)$
- $\forall x \neg\neg A(x) \to \neg\neg \forall x A(x)$
- $\neg\neg(\forall x \neg\neg A(x) \to \neg\neg \forall x A(x))$
- $\neg\neg \exists x A(x) \to \exists x \neg\neg A(x)$

Exercice 2 —— Modèles linéaires

Soit $(W, \leq, w_0)$ un poset enraciné et supoosons que, **pour toute** valuation persistente V sur W, on a $(W, \leq, V), w_0 \vDash (P \to Q) \vee (Q \to P)$. Montrer que W est linéairement ordonné.
Indice: que se passe-t-il lorsqu'il y a deux branches?

Exercice 3 —— Sémantique topologique $(\star)$

Dans cet exercice, on ne regarde que le fragment propositionnel de la logique constructive, on ne considère donc que les formules sans quantificateurs. On donne une première semantique à cette logique, la semantique topologique de TARSKI.

Un espace topologique est défini par un ensemble E et un ensemble $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(E)$ tel que:
- l'ensemble vide $\emptyset$ est dans $\mathcal{O}$
- E est dans $\mathcal{O}$
- si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles dans $\mathcal{O}$, alors $\cup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$
- if $(U_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'ensembles dans $\mathcal{O}$, alors $\cap_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Les élements de $\mathcal{O}$ sont dit ouverts. Etant donné un sous-ensemble $W \subseteq E$, on définit :
- $c(W) = E/W$, le complémentaire de W
- $i(W)$ le plus grand ouvert inclus dans W , appelé l'intérieur de W

Une interprétation topologique est définie par un espace topologique $\langle E, O \rangle$ et une fonction σ des variables vers $\mathcal{O}$. L'interprétation est étendue à toutes les formules A par induction structuelle :
- $[\![\top]\!] = E$
- $[\![\bot]\!] = \emptyset$
- $[\![X]\!] = \sigma(X)$
- $[\![A_1 \wedge A_2]\!] = [\![A_1]\!] \cap [\![A_2]\!]$
- $[\![A_1 \vee A_2]\!] = [\![A_1]\!] \cup [\![A_2]\!]$
- $[\![\neg A]\!] = i(c([\![A]\!]))$
- $[\![A_1 \Rightarrow A_2]\!] = i(c([\![A_1]\!]) \cup [\![A_2]\!])$

On peut remarquer que $[\![A]\!]$ est un ouvert. On appelle $[\![\Gamma]\!]$ l'ensemble ouvert $\cap_{A \in \Gamma} [\![A]\!]$.
1. Montrez que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} A$ est démontrable, alors $[\![\Gamma]\!] \subseteq [\![A]\!]$ dans toute interprétation topologique.
2. Considérez une formule non démontrable dans LJ (tier-exclu,etc ...), et montrer qu'elle n'est pas démontrable en utilisant la sémantique topologique.

Vous pouvez utilisez $\mathbb{R}$ avec sa topologie habituelle (générée par les intervalles ouverts).

Exercice 4 ——

1. Soit $\mathcal{K} = (W, \leq)$ une $\mathbf{IQC}$-structure finie et soit n son nombre de sous-ensembles clos par le haut. Soit $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble de variables. Montrer que la formule suivante est satisfaite par $\mathcal{K}$:
$$\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} (p_i \leftrightarrow p_j)$$
2. Prouver qu'il n'existe pas de poset enraciné fini $(W, \leq, w_0)$ tel que pour toute formule A, on a $\vdash_{\mathrm{LJ}} A$ si et seulement si pour toute valuation persistente V sur W, on a $(W, \leq, V), w_0 \vDash A$.

Exercice 5 —— Structures de Kripke et logique constructive

1. Structure de Kripke

Dans la suite, X, Y, Z sont des symboles de prédicat constants.

1. La $\mathbf{IQC}$-structure suivante est-elle un modèle de $(\neg Y \wedge X) \to Z$? :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] X,Z\ \bullet w_1 & & w_2 \bullet\ X,Z \\ & w_0 \bullet\ X \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

2. Soit $w \in W$ un monde.
   - Que signifie $\mathcal{M}, w \vDash \neg\neg X$?
   - Que signifie $\mathcal{M}, w \vDash \neg(\neg X \wedge \neg Y)$?
3. Pour chacune des formules suivantes, si elles ne sont pas prouvables constructivement, donnez une $\mathbf{IQC}$-structure ne les validant pas.
   - $X \to \neg\neg X$
   - $\neg\neg X \to X$
   - $\neg X \vee \neg\neg X$
   - $\neg(X \wedge Y) \to (\neg X \vee \neg Y)$
   - $(\neg X \vee \neg Y) \to \neg(Y \wedge X)$
   - $(X \to Y) \to (\neg X \vee Y)$
   - $\neg\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$
   - $\neg\neg(A \to B) \leftrightarrow (\neg\neg A \to \neg\neg B)$
4. La $\mathbf{IQC}$-structure suivante est-elle un modèle de $\exists x.\exists y. x < y \wedge \neg(\exists z. x < z \wedge z < y)$?

$$\begin{tikzcd} \bullet\ \mathbb{R} \\ \bullet\ \mathbb{N} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

2. Connecteurs indépendants

On dit qu'un connecteur binaire $\otimes$ est indépendant d'un ensemble de connecteurs C s'il n'y a pas de formule A utilisant X et Y, construite uniquement avec des connecteurs de C telle que
$\vdash_{\text{LJ}} (X \otimes Y) \leftrightarrow A$.

1. Montrez que si $\vee$ n'est pas indépendant de $\{\bot, \wedge, \neg, \to\}$, alors $\vdash_{\text{LJ}} \neg\neg(X \vee Y) \leftrightarrow (\neg\neg X \vee \neg\neg Y)$.
   Astuce : utilisez la questions 1.3.

   On considère la $\mathbf{IQC}$-structure $\mathcal{M}$ avec les mondes suivants: $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ avec $\omega_1 \leq \omega_3$, $\omega_2 \leq \omega_3$ et $X^{\omega_1} = Y^{\omega_2} = X^{\omega_3} = X^{\omega_3} = 1$ et $Y^{\omega_1} = X^{\omega_2} = 0$. *(Faire un dessin)*
2. Montrez que pour toute formule A contenant uniquement $X, Y, \bot, \neg, \vee$ et $\to$,
   si $\omega_3 \vDash A$ alors $\omega_1 \vDash A$ ou $\omega_2 \vDash A$. Conclure que $\wedge$ est indépendant de $\{\bot, \vee, \neg, \to\}$.

3. Tiers exclus$(\star)$

On note $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des symboles de prédicats d'arité 0 de notre langage, que l'on suppose non vide. Soit $\mathcal{M}$ la $\mathbf{IQC}$-structure avec pour mondes les interprétations partielles i.e. les paires (I, f) où $I \subset \mathcal{P}_0$ et $f : I \to \{0, 1\}$. Pour tout $X \in \mathcal{P}_0$, $\hat{X}^{(I,f)} = 1$ ssi $X \in I$ et $f(X) = 1$. La structure $\mathcal{M}$ est ordonnée par $\sqsubseteq$, où $(I, f) \sqsubseteq (J, g)$ ssi $I \subseteq J$ et pour tout $X \in I, f(X) = g(X)$.

1. Que signifie $\mathcal{M}, (I, f) \vDash \neg X$ où $X \in I$?
2. Montrez que $\mathcal{M}$ ne valide pas $X \vee \neg X$.
3. Donnez une formule A non prouvable constructivement, mais validée par la structure $\mathcal{M}$.

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 08/04 ou avant par mail, sous la forme Nom_Prenom_Numero (ou similaire).

Exercice 1

Montrer en utilisant les modèles $\mathbf{IQC}$ que $\exists x(B(x) \to \forall y B(y))$ n'est pas prouvable de manière intuitionniste.