Corrigé TD 7 — Logique modale

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 —— Contres-exemples

1. Soit p et q des symboles de proposition. Montrer que les formules suivantes ne sont pas valides, en exhibant des cadres les réfutant:
   1. $\Box\bot$
   2. $\Diamond p \to \Box p$
   3. $\Diamond p \to p$
   4. $\Box p \to \Box\Box p$
2. Pour chacune de ces formules, donner une class non-vide de cadres pour laquelle elle est valide.

Exercice 2 —— Expressivité de la logique modale

1. Montrer qu'un cadre (W, R) vérifie $\mathtt{L}$ ($\Box(\Box p \to p) \to \Box p$) si et seulement si la relation R^{-1} inverse de R est transitive et bien fondée.
2. Par compacité, montrer que la classe des cadres vérifiant $\mathtt{L}$ n'est pas caractérisable par une formule logique du premier ordre.

Exercice 3 —— K-preuve

Donner une **K**-preuves de la formule $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

Solution 1

$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$:

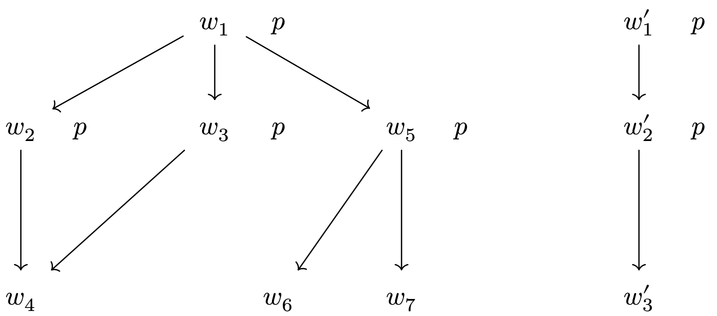
1. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (K)
2. $\Box(p \wedge q \rightarrow q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q)$ $(S, 1.)[p \wedge q/p, q/q]$
3. $\Box(p \wedge q \rightarrow p) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p)$ $(S, 1.)[p \wedge q/p, p/q]$
4. $p \wedge q \rightarrow q$ (T)
5. $p \wedge q \rightarrow p$ (T)
6. $\Box(p \wedge q \rightarrow q)$ $(N, 4.)$
7. $\Box(p \wedge q \rightarrow p)$ $(N, 5.)$
8. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q$ $(MP, 2., 6.)$
9. $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$ $(MP, 3., 7.)$
10. $(p \rightarrow q_1) \rightarrow (p \rightarrow q_2) \rightarrow (p \rightarrow q_1 \wedge q_2)$ (T)
11. $(\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box q) \rightarrow (\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q))$ $(S, 10.)[\Box(p \wedge q)/p, \Box p/q_1, \Box q/q_2]$
12. $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ $(MP \times 2, 11., 9., 8.)$

$(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$ (T)
2. $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)))$ $(N, 1.)$
3. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (K)
4. $\Box(p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$ $(S, 3.)[(q \rightarrow (p \wedge q)/q]$
5. $(\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)))$ $(MP, 2., 4.)$
6. $\Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$ $(S, 3.)[q/p, (p \wedge q)/q]$
7. $(a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$ (T)
8. $(\ \Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow (p \wedge q)\ ) \rightarrow (\ \Box(q \rightarrow (p \wedge q)) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))\ ) \rightarrow (\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$ $(S, 7)[\Box p/a, \Box(q \rightarrow (p \wedge q))/b, (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))/c]$
9. $\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))$ $(MP \times 2, 8., 4., 5.)$
10. $(a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \wedge b \rightarrow c)$ (T)
11. $(\Box p \rightarrow (\Box q \rightarrow \Box(p \wedge q))) \rightarrow ((\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)))$ $(S, 10)[\Box p/a, \Box q/b, \Box(p \wedge q)/c]$
12. $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q))$ $(MP, 11., 9.)$

Exercice 4 —— Bisimilarité

Montrer que les modèles suivants sont bisimilaires:



Exercice 5 —— Logique modale de la temporalité

1. Horizons lointains

On se restreint à la classe des modèles dont le cadre est (W, R) avec

$$W = \{w_t \mid t \in \mathbb{N}\} \text{ et } R = \{(w_t, w_{t'}) \mid t \in \mathbb{N}, t' \in \mathbb{N}, t \leq t'\}.$$

(Cette classe est axiomatisable)

1. Donner une interprétation des opérateurs $\Box$ et $\Diamond$ dans ce contexte. Si t représente un temps discret, que veulent dire ces opérateurs?
2. Montrer que la formule p est expressible par une formule à une variable libre par dans $FO[<]$.
3. Montrer que l'opérateur $\Box$ est expressible par une formule à une variable libre par dans $FO[<]$.

   C'est en fait un fragment restreint de la logique temporelle linéaire (LTL), contenant plusieurs modalités, dont l'expressivité correspond exactement à la logique monadique du premier ordre. (Théorème de Kamp).
4. Donner une interprétation dans cette logique modale de " p se produit infiniment souvent ".

2. Différents horizons

On se place désormais dans la classe des modèles dont le cadre est (W, S) avec

$$S = \{(w_t, w_{t+1}) \mid t \in \mathbb{N}\}$$

On considère les modalités X (neXt) et U (Until), de sémantiques

$$\mathcal{M}, w_t \vDash X\varphi \text{ si, et seulement si } \mathcal{M}, w_{t+1} \vDash \varphi$$

$$\mathcal{M}, w_t \vDash \varphi U \psi \text{ si, et seulement si il existe } t' \geq t \text{ tel que } \mathcal{M}, w_{t'} \vDash \psi \text{ et pour tout } k \in [\![t, t']\!], \mathcal{M}, w_{t'} \vDash \varphi$$

1. Montrer (sémantiquement) que pour toute formules φ et ψ, on a $\varphi U \psi \leftrightarrow \psi \vee (\varphi \wedge X(\varphi U \psi))$
2. Montrer que pour toute formules φ, ψ et θ, si $\psi \vee (\varphi \wedge X\theta) \to \theta$ est valide, alors $\varphi U \psi \to \theta$ est valide.

   On note G et F les modalités $\Box$ et $\Diamond$ de la partie 1, sur la clôture reflexive et transitive de S.
3. Donner une sémantique de G et F.
4. Exprimer F et G avec U.
5. Montrer que les opérateurs U et X sont expressibles par des formule à une variable libre par dans $FO[<]$.

3. Expressivité

Exprimer en logique modale temporelle: « On a toujours a lorsque b est suivi de non b » et « L'événement p se produit infiniment souvent ».

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 15/04 ou avant par mail, sous la forme Nom_Prenom_Numero (ou similaire).

Exercice 1

Pour chaque formule, montrer sémantiquement qu'elle est valide ou donner ou un modèle la réfutant.

1. $\Box p \to p$
2. $\Diamond(p \wedge q) \to \Diamond(p) \wedge \Diamond(q)$
3. $p \to \Box\Diamond p$
4. $\Box(p \vee \Box q) \to \Box p \vee \Box\Box q$
5. $\Diamond(\Box p \wedge \Diamond q) \to \Diamond\Diamond\top$