

TD 8 – Algèbre modale

Nicolas Dumange nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr

Exercice 1 — Algèbre modale

Donner des algèbres modales ne respectant pas les équations suivantes:

1. $\Box p \rightarrow p = \top$
2. $\Box \Box p \rightarrow \Box p = \top$

Exercice 2 — Filtres et algèbres booléennes

1. Montrer qu'un filtre est maximal au sens de l'inclusion si et seulement si c'est un ultrafiltre.
2. Montrer que tout ultrafiltre d'une algèbre booléenne A finie est principal.
3. Montrer que pour tout ensemble infini X , l'algèbre Booléenne $\mathcal{P}(X)$ admet un ultrafiltre non-principal. *Indice: Lemme de Zorn*
4. (★) Montrer que toute algèbre booléenne A infinie admet un ultrafiltre non principal.

Exercice 3 — Traduction standard

L'objectif de cet exercice est de traduire la logique modale en logique (classique) du premier ordre, sur une signature \mathcal{L} contenant, pour tout $p \in P$, un symbole de relation unaire, dénoté lui aussi p , et une relation binaire R . Pour cela, nous assimilerons un modèle $\mathcal{M} = (W, R, V)$ au sens de la logique modale, avec la \mathcal{L} -structure W , où R est l'interprétation de la relation R , et pour tout $p \in P$, le symbole de prédicat est interprété par $\{w \in W \mid p \in V(w)\}$. On distinguera de même \models_{ML} et \models_{FO}

Pour éviter les ambiguïtés, nous parlerons de *formules modales* pour les formules de \mathcal{K} , et de *formules du premier ordre* pour les formules de $\text{FO}(\mathcal{L})$.

1. Donner une formule du premier ordre satisfaite par les mêmes modèles que la formule modale p , puis $\Box p$.
2. En déduire une fonction T des formules modales vers les formules du premier ordre, telle que pour toute formule modale φ , la formule $T(\varphi)$ est satisfaite par les mêmes modèles.
(*Bonus: n'utiliser que 2 variables*)
3. Démontrer la correction de T , c'est à dire que pour tout modèle dirigé, et pour toute formule modale φ , on a $\mathcal{M}, w \models_{\text{ML}} \varphi$ si et seulement si $\mathcal{M}, x \mapsto w \models_{\text{FO}} \varphi$.

Remarque: Il faut bien distinguer les modèles et les cadres pour la logique modale. En effet il a été vu lors du TD précédant que la formule $(L) : \Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ caractérise les cadres où R est transitif, et d'inverse bien fondé. Cette propriété n'est pas définissable en premier ordre, et ni L ni $T(L)$ ne caractérise de telles relations.

Exercice 4 — Théorème de van Benthem

En reprenant les notations de l'exercice précédent, une formule du premier ordre avec une variable libre $\varphi(x)$ est dite invariante par bisimulation si pour tout modèles de la logique modale \mathcal{M}_1, w_1 et \mathcal{M}_2, w_2 , si ces modèles sont bisimilaires, alors $\mathcal{M}_1, x \mapsto w_1 \models_{\text{FO}} \varphi$ si et seulement si $\mathcal{M}_2, x \mapsto w_2 \models_{\text{FO}} \varphi$.

On définit pour la conséquence modale d'une formule $\varphi(x)$ du premier ordre invariante par bisimulation:

$$MOC(\varphi) = \{T(\psi) \mid \psi \text{ formule modale, et } \varphi(x) \models_{\text{FO}} T(\psi)(x)\}$$

En admettant $MOC(\varphi) \models_{\text{FO}} \varphi(x)$, montrer que φ est la traduction d'une formule modale.

Indice: compacité

Ce résultat peut être étendu pour montrer que toute formule du premier ordre invariante par bisimulation est équivalente à la traduction d'une formule modale.

Contrôle continu

À rendre en TD le mercredi 22/04 ou avant par mail, sous la forme Nom_Prenom_Numero (ou similaire).

Exercice 1 — Logiques modales normales

On se place dans la logique S5, à savoir la logique modale où l'on admet les axiomes

$$\Diamond p \leftrightarrow \neg \Box \neg p, \text{ (K) : } \Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q), \text{ (T) : } \Box p \rightarrow p \text{ et (5) : } \Diamond p \rightarrow \Box \Diamond p$$

Donner une S5-preuve de $\Diamond \Box G \rightarrow \Box G$.