

## TD 9 – Logique constructive

Nicolas Dumange [nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr](mailto:nicolas.dumange@ens-paris-saclay.fr)  
Théo Vignon [theo.vignon@ens-paris-saclay.fr](mailto:theo.vignon@ens-paris-saclay.fr)

### Exercice 1 — Une autre théorie des nombres

On écrit  $\Gamma \vdash_c A$  si  $\Gamma \vdash A$  en déduction naturelle classique, et  $\Gamma \vdash_i A$  si  $\Gamma \vdash A$  en déduction naturelle constructive (le « i » signifie intuitioniste).

#### 1. Preuves constructives et négations

Prouvez que  $\vdash_i A \Rightarrow \neg\neg A$  et  $\vdash_i \neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$ . Tracez le graphe avec pour sommets les  $\neg^k A$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et pour arêtes les implications prouvables constructivement. Quelles arrêtes sont ajoutées dans le cas classique ?

#### 2. Propriétés constructives

1. Prouvez que  $A \vee \neg A$  n'est pas démontrable dans la déduction naturelle classique pour toute formule  $A$ .
2. Prouvez que si  $\vdash_i \exists x.A$ , alors il existe un terme  $t$  tel que  $\vdash_i (x/t)A$ .
3. Prouvez que si  $\vdash_i \forall x \exists y.A$ , alors il existe une fonction  $f$  des termes clos vers les termes telle que pour tout terme  $t$ ,  $\vdash_i (y/f(t), x/t)A$ .
4. Prouvez que la formule  $\exists x.(P(x) \Rightarrow \forall y.P(y))$  n'est pas démontrable pour la déduction naturelle constructive.

#### 3. Traduction par double négation

Étant donnée une formule  $A$ , on définit sa traduction de GÖDEL (ou traduction par double négation) par induction structurale sur  $A$ :

- si  $A$  est atomique,  $\mathcal{G}(A) = \neg\neg A$
- $\mathcal{G}(\top) = \top$
- $\mathcal{G}(\perp) = \perp$
- $\mathcal{G}(\neg A) = \neg \mathcal{G}(A)$
- $\mathcal{G}(A_1 \wedge A_2) = \mathcal{G}(A_1) \wedge \mathcal{G}(A_2)$
- $\mathcal{G}(A_1 \vee A_2) = \neg\neg(\mathcal{G}(A_1) \vee \mathcal{G}(A_2))$
- $\mathcal{G}(A_1 \Rightarrow A_2) = \mathcal{G}(A_1) \Rightarrow \mathcal{G}(A_2)$
- $\mathcal{G}(\forall x.A) = \forall x.\mathcal{G}(A)$
- $\mathcal{G}(\exists x.A) = \neg\neg\exists x.\mathcal{G}(A)$

Si  $\Gamma$  est un ensemble de formules, on écrit  $\mathcal{G}(\Gamma)$  l'ensemble  $\{\mathcal{G}(A) \mid A \in \Gamma\}$ . Le but de l'exercice est de prouver l'équivalence entre  $\Gamma \vdash_c A$  et  $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_i \mathcal{G}(A)$ .

1. Prouvez que pour toute formule  $A$ ,  $\vdash_i \neg\neg \mathcal{G}(A) \Rightarrow \mathcal{G}(A)$ . Essayez de traiter au moins les cas suivants :  $\neg$  ;  $\wedge$  ;  $\exists$ .

Vous pouvez utiliser le fait que  $\neg\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$  est démontrable constructivement.

2. Montrez que pour toute formule  $A$ , si  $\Gamma \vdash_c A$  alors  $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_i \mathcal{G}(A)$ . Essayez de traiter au moins

les cas : introduction de  $\wedge$  et de  $\vee$  ; élimination de  $\vee$  ; RAA.

3. Montrez que pour toute formule  $A$ ,  $\vdash_c A \Leftrightarrow \mathcal{G}(A)$ .
4. Montrez que pour toute formule  $A$ , si  $\mathcal{G}(\Gamma) \vdash_i \mathcal{G}(A)$  alors  $\Gamma \vdash_c A$ .

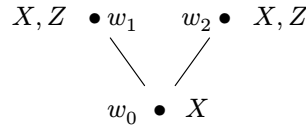
## Exercice 2 — Structures de Kripke et logique constructive

Soit  $\mathcal{K}$  un modèle de Kripke avec un ensemble de mondes  $W$  et son ordre  $\leq$ . Soit  $\varphi$  une valuation. On écrira  $\mathcal{K}, w, \varphi \models A$  pour  $\llbracket A \rrbracket_{\varphi}^w = 1$ . On pourra omettre la structure et la valuation dans cette notation quand elles sont claires au vu du contexte.

### 1. Structure de Kripke

Dans la suite,  $X, Y, Z$  sont des symboles de prédicat constants.

1. Est-ce que la structure suivante :



Est un modèle de  $(\neg Y \wedge X) \Rightarrow Z$  ?

2. Soit  $w \in W$  un monde.

- Que signifie  $\mathcal{K}, w \models \neg\neg X$  ?
- Que signifie  $\mathcal{K}, w \models \neg(\neg X \wedge \neg Y)$  ?

3. Pour chacune des formules suivantes, si elles ne sont pas prouvables constructivement, donnez un modèle de Kripke ne les validant pas.

- |                                                     |                                                                                   |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| • $X \Rightarrow \neg\neg X$                        | • $(\neg X \vee \neg Y) \Rightarrow \neg(Y \wedge X)$                             |
| • $\neg\neg X \Rightarrow X$                        | • $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg X \vee Y)$                                 |
| • $\neg X \vee \neg\neg X$                          | • $\neg\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg B)$           |
| • $\neg(X \wedge) \Rightarrow (\neg X \vee \neg Y)$ | • $\neg\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg B)$ |

4. Est-ce que la structure de Kripke



est un modèle de  $\exists x. \exists y. x < y \wedge \neg(\exists z. x < z \wedge z < y)$  ?

### 2. Connecteurs indépendants

On dit qu'un connecteur binaire  $\otimes$  est indépendant d'un ensemble de connecteurs  $C$  s'il n'y a pas de formule  $A$  utilisant  $X$  et  $Y$ , construite uniquement avec des connecteurs de  $C$  telle que

$$\vdash_i (X \otimes Y) \Leftrightarrow A.$$

1. Montrez que si  $\vee$  n'est pas indépendant de  $\{\perp, \wedge, \neg, \Rightarrow\}$ , alors  $\vdash_i \neg\neg(X \vee Y) \Leftrightarrow (\neg\neg X \vee \neg\neg Y)$ . *Astuce : utilisez les questions 3.(g) et 3.(h) de l'exercice 2.1 Conclure.*

On considère la structure de Kripke  $\mathcal{K}$  avec les mondes suivants:  $W = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  avec  $\omega_1 \leq \omega_3$ ,  $\omega_2 \leq \omega_3$  et  $X^{\omega_1} = Y^{\omega_2} = X^{\omega_3} = 1$  et  $Y^{\omega_1} = X^{\omega_2} = 0$ .

*Conseil : Faire un dessin*

2. Montrez que pour toute formule  $A$  contenant uniquement  $X, Y, \perp, \neg, \vee$  et  $\Rightarrow$ , si  $\omega_3 \models A$

alors  $\omega_1 \models A$  ou  $\omega_2 \models A$ . Conclure que  $\wedge$  est indépendant de  $\{\perp, \vee, \neg, \Rightarrow\}$ .

### 3. Tiers exclus

On note  $\mathcal{P}_0$  l'ensemble des symboles de prédicats d'arité 0 de notre langage, que l'on suppose non vide. Soit  $\mathcal{K}$  la structure de Kripke avec pour mondes les interprétations partielles i.e. les paires  $(I, f)$  où  $I \subset \mathcal{P}_0$  et  $f : I \rightarrow \{0, 1\}$ . Pour tout  $X \in \mathcal{P}_0$ ,  $\hat{X}^{(I, f)} = 1$  ssi  $X \in I$  et  $f(X) = 1$ . La structure  $\mathcal{K}$  est ordonnée par  $\sqsubseteq$ , où  $(I, f) \sqsubseteq (J, g)$  ssi  $I \subseteq J$  et pour tout  $X \in I$ ,  $f(X) = g(X)$ .

1. que signifie  $\mathcal{K}, (I, f) \models \neg X$  où  $X \in I$  ?
2. Montrez que  $\mathcal{K}$  ne valide pas  $X \vee \neg X$ .
3. Donnez une formule  $A$  non prouvable constructivement, mais validée par la structure  $\mathcal{K}$ .