# Algorithmique

Paul Gastin

Paul.Gastin@lsv.ens-cachan.fr
http://www.lsv.ens-cachan.fr/~gastin/Algo/

L3 Informatique Cachan
2012-2013



# Plan

1 Introduction

Preuve et terminaison

Complexité

Paradigmes

Structures de données (types abstraits)

Dictionnaires et tableaux associatifs

Files de priorité

Gestion des partitions (Union-Find)



# Motivations

1. Étudier des modèles de données : types abstraits.
2. Étudier des implémentations : structures de données concrètes.
3. Étudier des algorithmes efficaces.
4. Prouver qu'un algorithme est correct.
5. Étudier la complexité des algorithmes (pire, moyenne, amortie).



# Bibliographie

[1] Alfred V. Aho et Jeffrey D. Ullman.
*Concepts fondamentaux de l'informatique.*
Dunod, 1993.

[2] Danièle Beauquier, Jean Berstel, Philippe Chrétienne.
*Éléments d'algorithmique.*
Masson, 1992. Épuisé. http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/

[3] Gilles Brassard, Paul Bratley.
*Fundamentals of Algorithmics.*
Prentice Hall, 1996.

[4] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein.
*Introduction à l'algorithmique.*
Dunod, 2002 (seconde édition).

[5] Philippe Flajolet et Robert Sedgewick.
*Introduction à l'analyse d'algorithmes.*
Addison-Wesley, 1996. Thomson Publishing, 1996.

# Bibliographie


[7] Dexter C. Kozen.
*The design and analysis of algorithms.*
Springer-Verlag, 1992.

[6] Christine Froideveaux, Marie-Claude Gaudel et Michèle Soria.
*Types de données et algorithmes.*
McGraw-Hill, 1990.

[8] Jon Kleinberg et Éva Tardos.
*Algorithm design.*
Addison-Wesley, 2005.

[9] Robert Sedgewick.
*Algorithms in C or C++ or Java.*
Addison-Wesley.

[10] Glynn Winskel.
*The Formal Semantics of Programming Languages.*
MIT Press, 1993.




# Plan


Introduction

2 Preuve et terminaison

Complexité

Paradigmes

Structures de données (types abstraits)

Dictionnaires et tableaux associatifs

Files de priorité

Gestion des partitions (Union-Find)




# Invariants

**Exemple : Urne**

Une urne contient initialement $n$ boules noires et $b$ boules blanches.
Tant que l'urne contient au moins 2 boules, on tire 2 boules dans l'urne et

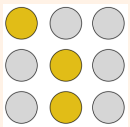
- on les jette si elles sont de la même couleur,
- on jette la noire et on remet la blanche dans l'urne sinon.

Si l'urne est vide, on remet une boule noire.

Quelle est à la fin la couleur de la boule dans l'urne ?

**Exemples : Le revers de la médaille**

Chaque médaille est dorée sur une face et argentée sur l'autre. On peut retourner simultanément les 3 médailles d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale.



Peut-on faire en sorte que toutes les médailles présentent la face dorée ?
Si oui, en combien de coups au minimum ?



# Invariants

**Exemple : Mystère**

Que fait l'algorithme suivant ?

```
Lire N
a <- 0; s <- 1; t <- 1
Tant que s ≤ N faire
   a <- a+1; s <- s+t+2; t <- t+2
Fin tant que
Afficher a
```

# Preuves d'algorithmes

cf. [10, Chapters 6 and 7].

http://www.lsv.ens-cachan.fr/~haddad/courstdagreg.pdf

http://www.brics.dk/~amoeller/talks/hoare.pdf

**Définition : Triplets de Hoare** $\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$

- $P$ est le programme.
- État $s$ du programme $P$: valeur des variables, de la pile, du tas, ...
- $\varphi$ est la pré-condition (hypothèse).
- $\psi$ est la post-condition (conclusion).
- $\varphi$ et $\psi$ sont des assertions/formules faisant intervenir les variables du programme.
  Ex: Logique du 1er ordre et arithmétique sur les entiers.
- $s \models \varphi$ : l'état $s$ satisfait la formule $\varphi$.

Sémantique : $\models \{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$
Pour tout état $s$ tel que $s \models \varphi$, si le programme $P$ termine en partant de $s$, alors l'état $P(s)$ obtenu vérifie $\psi$ :

$$(s \models \varphi \wedge P \text{ termine sur } s) \Longrightarrow P(s) \models \psi$$



# Preuves d'algorithmes

**Exemples :**

$\{t = 2a+1\}$ `a <- a+1; t <- t+2` $\{t = 2a+1\}$

$\{t=2a+1 \wedge s=(a+1)^2\}$ `a <- a+1; s <- s+t+2; t <- t+2` $\{t=2a+1 \wedge s=(a+1)^2\}$

$\{N \geq 0\}$
```
a <- 0; s <- 1; t <- 1
Tant que s ≤ N faire
   a <- a+1; s <- s+t+2; t <- t+2
Fin tant que
```
$\{a = \lfloor\sqrt{N}\rfloor\}$



# Système de preuve de Hoare

**Définition : Axiome et Règles de preuve**

Arrêt
$$\frac{}{\{\psi\}\ SKIP\ \{\psi\}}$$

Affectation
$$\frac{}{\{\psi[e/x]\}\ x := e\ \{\psi\}}$$

$\psi[e/x]$ : $\psi$ dans laquelle on a substitué $e$ aux occurrences de $x$.

Séquence
$$\frac{\{\psi_1\}\ P_1\ \{\psi_2\} \qquad \{\psi_2\}\ P_2\ \{\psi_3\}}{\{\psi_1\}\ P_1; P_2\ \{\psi_3\}}$$

Conditionnelle
$$\frac{\{c \wedge \varphi\}\ P_1\ \{\psi\} \qquad \{\neg c \wedge \varphi\}\ P_2\ \{\psi\}}{\{\varphi\}\ \texttt{si}\ c\ \texttt{alors}\ P_1\ \texttt{sinon}\ P_2\ \texttt{fsi}\ \{\psi\}}$$

**Exemples :**

$$\{s + t + 2 = (a+1)^2\}\ s := s + t + 2\ \{s = (a+1)^2\}$$

$$\{t = 2a + 1 \wedge s = (a+1)^2\}\ a := a{+}1; s := s{+}t{+}2; t := t{+}2\ \{t = 2a + 1 \wedge s = (a+1)^2\}$$

$$\{\texttt{True}\}\ \texttt{si}\ a < b\ \texttt{alors}\ x := a\ \texttt{sinon}\ x := b\ \texttt{fsi}\ \{x = \min(a, b)\}$$



# Système de preuve de Hoare

**Définition : Axiome et Règles de preuve**

Itération
$$\frac{\{c \wedge I\}\ P\ \{I\}}{\{I\}\ \texttt{tant que}\ c\ \texttt{faire}\ P\ \texttt{ftq}\ \{\neg c \wedge I\}}$$

Pré-renforcement et Post-affaiblissement
$$\frac{\varphi \Rightarrow \varphi' \qquad \{\varphi'\}\ P\ \{\psi'\} \qquad \psi' \Rightarrow \psi}{\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}}$$

Conjontion
$$\frac{\{\varphi_1\}\ P\ \{\psi_1\} \qquad \{\varphi_2\}\ P\ \{\psi_2\}}{\{\varphi_1 \wedge \varphi_2\}\ P\ \{\psi_1 \wedge \psi_2\}}$$

**Exemple :**

Prouver l'algorithme "Mystère"

**Théorème : Le système de preuve est correct (sound)**

$$\vdash \{\varphi\}\ P\ \{\psi\} \text{ implique } \models \{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$$

Si on peut prouver $\{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$ dans ce système de preuve ($\vdash \{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$) alors pour tout état $s$ vérifiant $\varphi$, si $P$ termine sur $s$ alors $P(s)$ vérifie $\psi$.

# Preuves et itérations

**Remarque :**

- Une boucle possède de nombreux invariants.
- Certains sont indépendants de la condition : {t=2a+1}.
- D'autres nécessitent la condition : $\{a^2 \leq N\}$.

**Boucle :**

Pour prouver $\{\varphi\}$ tant que $c$ faire $P$ $\{\psi\}$
Deviner un invariant $I$ et prouver

Initialisation : $\varphi \Rightarrow I$

Invariant : $\{I \wedge c\}\ P\ \{I\}$

Conclusion : $\neg c \wedge I \Rightarrow \psi$

Remarque : ceci ne prouve pas la terminaison.



# Preuve d'algorithmes

**Exemple : Recherche Dichotomique**

```
fonction chercheDicho (t:tableau[1..n] de réels; n:entier; c:réel):entier
PRE : n ≥ 1 ∧ t[1..n] trié
POST : retourne 1 ≤ i ≤ n tq c = t[i] ∨ c ∉ t[1..n]
Début
   i <- 1; j <- n



   tq i < j faire
      m <- (i+j) div 2
      si c ≤ t[m] alors j <- m sinon i <- m+1 fsi
   ftq
   retourner i
Fin
```

**Exercice : Exponentiation rapide**

Écrire une fonction d'exponentiation rapide et prouver sa correction.



# Preuve d'algorithmes

**Exemple : Correction de Partition pour le tri Rapide**

```
Procédure partition (t:tableau[1..n] de réels; i,j:entiers; k:entier)
PRE : 1 ≤ i < j ≤ n
POST : 1 ≤ i ≤ k ≤ j ≤ n ∧ t[i..k-1] ≤ t[k] < t[k+1..j] ∧
         t[i..j] permutation de t[i..j] (où t est valeur initiale)
Début
   g <- i; d <- i



   tant que d < j faire
      si t[d] ≤ t[j] alors
         échanger(t[g],t[d])
         g <- g+1
      fsi
      d <- d+1
   ftq
   échanger(t[g],t[j])
   k <- g
Fin
```



# Preuve et récursivité

**Exemple : Tri rapide**

```
procédure triRapide (t:tableau[1..n]; i,j:entiers)
PRE : 1 ≤ i ∧ j ≤ n
POST : t[i..j] trié ∧ t[i..j] permutation de t[i..j]
Début
   si i < j alors

      Partition (t,i,j,k)


      triRapide (t,i,k-1)


      triRapide (t,k+1,j)


   fsi
Fin
```

On vérifie qu'avant chaque appel récursif l'hypothèse de triRapide est satisfaite.
On peut alors supposer la spécification vraie après chaque appel récursif.
La preuve doit être directe pour les exécutions sans appel récursif.

# Plus faible pré-condition

**Définition : Plus faible pré-condition (Dijkstra)**

Soit $P$ un programme et $\psi$ une post-condition.
On note $wp(P,\psi)$ la plus faible pré-condition qui assure $\psi$ après l'exécution de $P$ :

$$\{wp(P,\psi)\}\ P\ \{\psi\}.$$

On note $[\![\psi]\!]$ l'ensemble des états du programme satisfaisant $\psi$.

$$[\![wp(P,\psi)]\!] = \{s \mid P \text{ ne s'arrête pas sur } s \text{ ou } P(s) \models \psi\}$$
$$[\![wp(P,\bot)]\!] = \{s \mid P \text{ ne s'arrête pas sur } s\ \}$$

**Théorème : Complétude du système de preuve**

Sous certaines hypothèses (variables entières, logique du premier ordre, ...)

- On peut calculer par induction sur le programme la plus faible pré-condition
- $\vdash \{wp(P,\psi)\}\ P\ \{\psi\}$
  le système de preuve permet de prouver la correction de la pfpc
- Le système de preuve est complet:

$$\models \{\varphi\}\ P\ \{\psi\} \text{ implique } \vdash \{\varphi\}\ P\ \{\psi\}$$



# Plus faible pré-condition

**Règles de calcul**

| | |
|---|---|
| Affectation | $wp(x := e, \psi) = \psi[e/x]$ |
| Séquence | $wp(P_1; P_2, \psi) = wp(P_1, wp(P_2, \psi))$ |
| Conditionnelle | $wp(\texttt{si } c \texttt{ alors } P_1 \texttt{ sinon } P_2 \texttt{ fsi}, \psi) = (c \wedge wp(P_1,\psi)) \vee (\neg c \wedge wp(P_2,\psi))$ |
| Itération | possible mais difficile ! |

**Exemples :**

$$wp(s := s+t+2, s = (a+1)^2) \quad = \quad s+t+2 = (a+1)^2$$

$$wp(a{:=}a{+}1; s{:=}s{+}t{+}2; t{:=}t{+}2, t{=}2a{+}1 \wedge s{=}(a{+}1)^2) \quad = \quad t{=}2a{+}1 \wedge s{=}(a{+}1)^2$$

$$wp(\texttt{si } a < b \texttt{ alors } x := a \texttt{ sinon } x := b \texttt{ fsi}, x = \min(a,b)) \quad = \quad \texttt{True}$$



# Relations bien fondées

**Définition : Relation bien fondée**

Une relation binaire $\prec$ sur un ensemble $E$ est bien fondée s'il n'existe pas de suite infinie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall i \in \mathbb{N}$, $e_{i+1} \prec e_i$ (décroissante).

**Exemple : $(\mathbb{N}, <)$**

**Proposition : Propriétés**

- Si $\prec$ est bien fondée alors $\prec$ est irréflexive.
- Si $\prec$ est bien fondée alors $\prec^+$ aussi.
- Si $\prec$ est bien fondée alors $\prec^*$ est une relation d'ordre partiel.

**Proposition : Ordre lexicographique**

Si $(E_1, \prec_1)$ et $(E_2, \prec_2)$ sont deux ensembles bien fondés, alors $(E_1 \times E_2, \prec)$ aussi, où

$$(e_1, e_2) \prec (f_1, f_2) \qquad \text{si} \qquad e_1 \prec_1 f_1 \quad \text{ou} \quad e_1 = f_1 \wedge e_2 \prec_2 f_2$$

**Exemple : $(\mathbb{N}^k, <)$**



# Terminaison

**Définition : Terminaison des boucles**

Définir une fonction $f$ à valeurs dans un ensemble muni d'une relation bien fondée, et qui dépend des variables du programme.
Montrer que la valeur de $f$ décroît strictement à chaque exécution du corps de boucle

**Exemples :**

- Urne
- Mystère
- recherche dichotomique
- Partition

# Terminaison

**Définition : Terminaison et récursivité**

Définir une fonction $f$ à valeurs dans un ensemble muni d'une relation bien fondée, et qui dépend des paramètres de la fonction/procédure.
Montrer que la valeur de $f$ décroît strictement à chaque appel récursif.

**Exemples :**

- Tri rapide
- Fonction d'Ackermann

```
fonction Ack (m,n:entiers):entier
Début
   si m = 0 alors retourner n+1
   si n = 0 alors retourner Ack(m-1,1)
   retourner Ack(m-1,Ack(m,n-1))
Fin
```



# Terminaison

**Théorème : Indécidabilité**

Il n'existe pas de programme qui permet de tester si un programme s'arrête.

- Un programme $P$ est une suite de bits que l'on peut interpréter comme un entier noté $\overline{P}$ (en ajoutant 1 comme bit de poids fort).
- On peut écrire une fonction $\texttt{correct}(m)$ qui teste si un entier représente un programme syntaxiquement correct.
- On peut se restreindre aux programmes $P$ ayant un paramètre entier.
- On cherche donc une fonction $\texttt{arret}(m, n)$ qui retourne
  - vrai si $m = \overline{P}$ est le code d'un programme $P$ ayant un paramètre entier et que $P(n)$ s'arrête;
  - faux sinon.



# Plan


Introduction

Preuve et terminaison

3 Complexité

Paradigmes

Structures de données (types abstraits)

Dictionnaires et tableaux associatifs

Files de priorité

Gestion des partitions (Union-Find)




# Quelques notations

**Définition : $\mathcal{O}$, $\Theta$ et $\Omega$**

On s'intéresse au comportement asymptotique d'une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ au voisinage de $+\infty$.

$$\mathcal{O}(g) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \beta > 0, \exists x_0 > 0, \forall x \geq x_0, |f(x)| \leq \beta |g(x)|\}$$

$$\begin{aligned}\Omega(g) &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g \in \mathcal{O}(f)\} \\ &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \alpha > 0, \exists x_0 > 0, \forall x \geq x_0, \alpha |g(x)| \leq |f(x)|\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Theta(g) &= \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g) \\ &= \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists \alpha, \beta > 0, \exists x_0 > 0, \forall x \geq x_0, \alpha |g(x)| \leq |f(x)| \leq \beta |g(x)|\}\end{aligned}$$

Les mêmes définitions s'appliquent aux fonctions $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ou $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

# Complexité au pire

**Définition : Complexité au pire**

Soit $A$ un algorithme et $x$ une donnée de $A$.
On note $c(x)$ le coût (en temps, en mémoire, ...) de l'exécution de $A$ sur $x$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $D_n$ l'ensemble des données de taille $n$.

La complexité au pire de $A$ est définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$C_{\text{pire}}(n) = \max_{x \in D_n} c(x).$$

Parfois on définit la complexité sur les données de taille au plus $n$:

$$C_{\text{pire}}(n) = \max_{m \leq n} \max_{x \in D_m} c(x).$$



# Complexité au pire

**Exemple : Fusion pour le tri fusion**

```
procédure Fusion (t:tableau[1..m]; i,j,k:entiers)
PRE : 1 ≤ i ≤ k < j ≤ m et t[i..k], t[k+1..j] triés
POST : permute t[i..j] en un tableau trié
Début
   s:tableau[i..j]
   a <- i; b <- k+1; c <- i

   tq a ≤ k et b ≤ j faire
      si t[a] ≤ t[b] alors s[c] <- t[a]; a++; c++
                     sinon s[c] <- t[b]; b++; c++
      finsi
   ftq
   tq a ≤ k faire s[c] <- t[a]; a++; c++ ftq
   tq b ≤ j faire s[c] <- t[b]; b++; c++ ftq
   t[i..j] <- s[i..j]
Fin
```

Complexité au pire

**Exercice : Prouver la correction de la procédure Fusion**

# Complexité au pire

**Exemple : Complexité au pire du tri fusion**

```
procédure tri-fusion (t:tableau[1..m] de réels; i,j:entiers)
PRE : 1 ≤ i ≤ j ≤ m
POST : permute t[i..j] en un tableau trié
Début
   si i < j alors
      k <- (i+j) div 2
      tri-fusion (t,i,k)
      tri-fusion (t,k+1,j)
      fusion (t,i,j,k)
   finsi
Fin
```

On suppose la complexité au pire de `fusion` en $\Theta(j - i + 1)$.
Complexité au pire du tri fusion satisfait la récurrence de partition ($n = j - i + 1$) :

$$\begin{aligned} c(1) &= 1 \\ c(n) &= n + c(\lceil n/2 \rceil) + c(\lfloor n/2 \rfloor) \qquad \text{si } n > 1 \end{aligned}$$



# Récurrences de partitions

**Théorème : Récurrences de partitions (cf. [2, chap. 2.2.3])**

Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante à partir d'un certain rang et telle que $\exists n_0 > 0, \exists b > 1, \exists k \geq 0, \exists a, c, d > 0$ vérifiant

$$\begin{aligned} t(n_0) &= d \\ t(n) &= at(n/b) + cn^k \qquad \text{si } n > n_0 \text{ et } n/n_0 \text{ est une puissance de } b \end{aligned}$$

alors

$$t(n) = \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{si } a < b^k \\ \Theta(n^k \log_b(n)) & \text{si } a = b^k \\ \Theta(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^k \end{cases}$$

**Exemple : Tri fusion**

$n_0 = 1$, $c = d = k = 1$, $a = b = 2$.

La complexité au pire du tri fusion est en $\Theta(n \log n)$.

# Récurrences de partitions

**Exercice :**

Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante à partir d'un certain rang et telle que

$$\begin{aligned} t(1) &= d \\ t(n) &= 2t(n/2) + \log_2(n) \qquad \text{si } n > 1 \text{ est une puissance de } 2 \end{aligned}$$

Montrer que $t(n) = \Theta(n)$.

Généraliser à $t(n) = at(n/b) + cn^k(\log_b n)^q$.

**Exercice :**

Montrer que la fonction $t$ définie par

$$\begin{aligned} t(1) &= 0 \\ t(n) &= n + t(\lceil n/2 \rceil) + t(\lfloor n/2 \rfloor) \qquad \text{si } n > 2 \end{aligned}$$

est

$$t(n) = n\lfloor \log n \rfloor + 2n - 2^{1+\lfloor \log n \rfloor}$$



# Complexité au pire

**Exercice : Récursivité en temps linéaire**

Soit $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction.
Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$, des fonctions $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, un entier $n_0$, et deux réels $0 < \alpha < 1$ et $\beta > 0$ tels que $\forall n > n_0$,

$$f_1(n) + \cdots + f_k(n) \leq \alpha n$$

et

$$t(n) \leq t(f_1(n)) + \cdots + t(f_k(n)) + \beta n$$

Montrer que $t(n) = \mathcal{O}(n)$.

**Exercice : Sélection**

Écrire une fonction de sélection dont la complexité au pire est linaire.

```
fonction Sélection (t:tableau[1..n] d'éléments; n,m:entiers):  élément
PRE : 1 ≤ m ≤ n
POST : retourne l'élément de rang m du tableau t
```



# Coût amorti

**Définition : Coût amorti**

On considère une suite d'opérations $o_1, \ldots, o_m$ agissant sur des données

$$d_0 \xrightarrow{o_1} d_1 \xrightarrow{o_2} d_2 \ldots \xrightarrow{o_m} d_m$$

Le coût amorti de cette suite d'opérations est $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c(o_i)$

**Exemple : opérations de pile**

dep-emp$_k(x)$ : dépiler $k$ éléments (si possible) puis empiler l'élément $x$.

Le coût de dep-emp$_k(x)$ est $1 + \min(k, \text{taille(pile)})$.

Le coût amorti d'une suite de telles opérations à partir d'une pile vide est 2.

Remarque : le potentiel d'une pile est sa hauteur.



# Coût amorti

**Définition : Méthode du potentiel**

On définit une fonction potentiel sur l'ensemble des données : $h : D \to \mathbb{R}_+$.
Le coût amorti par potentiel de l'opération $d_{i-1} \xrightarrow{o_i} d_i$ est :

$$a(o_i) = c(o_i) + h(d_i) - h(d_{i-1})$$

Le coût amorti par potentiel d'une suite d'opérations est $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a(o_i)$.

**Lemme : Coût amorti et potentiel**

Si $h(d_0) \leq h(d_m)$ alors $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} c(o_i) \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a(o_i)$.

**Exemple : Incrémentation**

On considère l'opération d'incrémentation d'un entier écrit en binaire.
Le coût de $i{+}{+}$ est $1 + k$ si $\bar{i}^2$ (l'écriture binaire de $i$) se termine par $01^k$.
Le coût amorti d'une suite de $n$ incrémentations à partir de 0 est 2.

# Implémentation d'une pile

**Exemple : Implémentation statique d'une pile**

```
N = 100
pile :  tableau[1..N] de réels
n <- 0

empiler(x) :  si n < N alors n++; pile[n] <- x fsi
dépiler() :  si n > 0 alors n--; retourner pile[n+1] fsi
```

**Exemple : Implémentation dynamique d'une pile**

empiler(x) lorsque le tableau est plein :
on crée un nouveau tableau de taille double,
on copie la pile dans le nouveau tableau avant d'empiler le nouvel élément.
Initialement, on part d'un tableau de taille $N = 1$.

**Proposition : Coût amorti**

Le coût amorti des opérations avec l'implémentation dynamique est constant.



# Complexité en moyenne

**Définition : Complexité en moyenne**

Soit $A$ un algorithme.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $D_n$ l'ensemble des données de $A$ de taille $n$.
On suppose $D_n$ muni d'une distribution de probabilité $p : D_n \to [0,1]$ :

$$1 = \sum_{x \in D_n} p(x)$$

Le coût $c_n : D_n \to \mathbb{R}_+$ de l'exécution de $A$ sur une donnée est une variable aléatoire.

La complexité en moyenne de $A$ est l'espérance de cette variable aléatoire :

$$C_{\text{moy}}(n) = \mathbf{E}(c_n) = \sum_{x \in D_n} p(x) \cdot c_n(x).$$

Dans le cas d'une distribution uniforme, on a :

$$C_{\text{moy}}(n) = \frac{1}{|D_n|} \sum_{x \in D_n} c_n(x).$$



# Complexité en moyenne

**Exemple : Complexité en moyenne du tri rapide**

```
procédure tri-rapide (t:tableau[1..n] de réels; i,j:entiers)
PRE : 1 ≤ i et j ≤ n
POST : permute t[i..j] en un tableau trié
Début
   si i < j alors
      partition (t,i,j,k)
      tri-rapide (t,i,k-1)
      tri-rapide (t,k+1,j)
   finsi
Fin
```

Complexité en moyenne : $\Theta(n \log n)$.



# Complexité en moyenne du Tri rapide

On considère que le tableau contient les éléments $1, 2, \ldots, n$.
C'est donc une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Univers : $\mathfrak{S}_n$ avec probabilité uniforme $p$.
On suppose que la procédure partition(t, 1, n, k) procède uniquement par comparaisons avec le pivot et échanges.
Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $\sigma^g$ la permutation "gauche" obtenue après partition.
On suppose que le pivot est $\sigma(n) = k$. On a alors $\sigma^g \in \mathfrak{S}_{k-1}$.

**Lemme : L'uniformité est préservée par la partition**

Soit $\rho \in \mathfrak{S}_{k-1}$, alors

$$|\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \text{ pivot} = k \wedge \sigma^g = \rho\}| = \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$$

et donc

$$p(\sigma^g = \rho \mid \text{pivot} = k) = \frac{1}{(k-1)!}$$

# Complexité en moyenne du Tri rapide

Pour $1 \leq i < j \leq n$, on définit la variable aléatoire $X_n^{i,j} : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ par $X_n^{i,j}(\sigma) =$ nombre de fois que les valeurs $i$ et $j$ sont comparées durant le tri.

**Lemme : Espérance des comparaisons**

- Si $1 \leq i < j < k \leq n$ alors $E(X_n^{i,j} \mid \text{pivot} = k) = E(X_{k-1}^{i,j})$

La fonction partition compare chaque clé exactement une fois avec le pivot.

- $E(X_n^{i,j}) = \dfrac{2}{j-i+1}$

Soit $X_n : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ la v.a. donnant le nombre de comparaisons du tri rapide.

**Théorème : $E(X_n) \leq 2n\ln(n)$**



# Complexité en moyenne

**Exercice : Tri rapide**

On définit les variables aléatoires $X_n^p, X_n^g, X_n^d : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ donnant les complexités respectives de la partition, de l'appel récursif "gauche" et de l'appel récursif "droit". Montrer que

- $X_n = X_n^p + X_n^g + X_n^d$
- $E(X_n^g) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_{k-1})$

La fonction partition fait $n-1$ comparaisons sur un tableau de taille $n$.

- $E(X_n) = n - 1 + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_{k-1})$

En déduire que $E(X_n) \in \mathcal{O}(n\ln(n))$.



# Borne inférieure de complexité

**Proposition : Hauteur moyenne des feuilles**

La hauteur moyenne des feuilles d'un arbre binaire ayant $n$ feuilles est au moins $\log_2 n$.

**Proposition : Comparaisons**

Le nombre moyen de comparaisons de clés pour les tris par comparaisons est en $\Omega(n \log n)$.

**Corollaire : Borne inférieure pour les tris par comparaison**

La complexité en moyenne pour les tris par comparaisons de clés est en $\Omega(n \log n)$.
La complexité au pire pour les tris par comparaisons de clés est en $\Omega(n \log n)$.



# Plan


Introduction

Preuve et terminaison

Complexité

4 Paradigmes
- Algorithmes gloutons
- Programmation dynamique
- Diviser pour régner

Structures de données (types abstraits)

Dictionnaires et tableaux associatifs

Files de priorité

Gestion des partitions (Union-Find)

# Bibliographie


[3] Gilles Brassard, Paul Bratley.
*Fundamentals of Algorithmics.*
Prentice Hall, 1996.

[8] Jon Kleinberg et Éva Tardos.
*Algorithm design.*
Addison-Wesley, 2005.

[4] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein.
*Introduction à l'algorithmique.*
Dunod, 2002 (seconde édition).




# Problèmes d'optimisation

**Définition : Problème d'optimisation**

- Un problème peut avoir plusieurs solutions
- Un critère d'évaluation permet de comparer les solutions
- On cherche une solution optimale.

**Exemple : Faire l'appoint (ou rendre la monnaie)**

Le problème est de faire l'appoint (rendre la monnaie) pour une somme donnée dans un système monétaire donné en minimisant le nombre de pièces.

- Données : les valeurs des pièces $1 = v_1 < v_2 < \cdots < v_k$ et la somme $n$.
- Solution : $n_1, \ldots, n_k$ tels que $n = n_1 v_1 + \cdots + n_k v_k$.
- Critère d'évaluation : minimiser $n_1 + \cdots + n_k$.

Variante : certaines pièces en nombre limité.



# Algorithmes gloutons

**Définition : Algorithme glouton**

- Cadre : Une solution est composée d'une suite de choix.
  Le premier choix fait, on est ramené à un sous-problème de même nature.
- Glouton : à chaque étape, on fait le choix qui semble optimal (optimum local) et on ne remet pas ce choix en question.
- Solution globale : premier choix + solution du sous-problème correspondant.

**Exemple : Faire l'appoint**

- Choix : une pièce à donner.
- Glouton : la pièce de plus grande valeur qui ne dépasse pas $n$ :
  On cherche $i$ maximal tel que $v_i \leq n$.
  Ce choix semble optimal.
- Sous-problème : $n - v_i$ avec le même système monétaire.

L'algorithme glouton ne donne pas forcément une solution globalement optimale :
Exemple : suite de valeurs 1, 4, 6



# Algorithmes gloutons

**Proposition : Faire l'appoint**

L'algorithme glouton est optimal (i.e., donne toujours une solution optimale) si la suite des valeurs est : $1, p, p^2, \ldots, p^k$ avec $p \geq 2$ entier.

**Exercice : Faire l'appoint**

L'algorithme glouton est-il optimal dans les systèmes monétaires suivants ?

- $v_1 = 1$ et $v_i \geq 2v_{i-1}$ pour $1 < i \leq k$.
- 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100. (Euros)
- 1, 5, 10, 25, 50, 100. (US)
- 1, $2\frac{1}{2}$, 5, 10, 20, 25, 50. (Portugais).
  Attention : $n$ est toujours entier.
- 1, 3, 6, 12, 24, 30. (Anglais avant le système décimal)

# Algorithmes gloutons

## Quand est-ce que ça marche ?

On suppose que l'on sait déterminer efficacement un choix localement optimal (glouton) sans regarder les sous-problèmes générés.

- Propriété du choix glouton :
  Il existe une solution globalement optimale dont le premier choix est localement optimal.
- Propriété des sous-structures optimales :
  Si un problème $A$ contient un sous-problème $B$, toute solution optimale au problème $A$ contient une solution optimale au sous-problème $B$.
  Contre-exemple : chemin simple de longueur maximale dans un graphe.
- Combinaison : Solution optimale au problème =
  choix glouton + solution optimale au sous-problème associé

## Difficultés des algorithmes glouton

- Trouver un bon choix glouton.
- Prouver que la solution obtenue est optimale.



# Sélection de tâches

## Exemple : Sélection de tâches

On dispose de $n$ tâches à éxecuter. Chaque tâche doit s'éxecuter durant un intervalle de temps donné. On dispose d'une seule ressource. On veut choisir un sous-ensemble maximal de tâches à exécuter.

- Données : les intervalles $I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_n = [a_n, b_n]$ associés aux tâches.
- Solution : $i_1 < \cdots < i_k$ tels que les intervalles $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ sont 2 à 2 disjoints.
- Critère d'évaluation : maximiser $k$.

## Choix gloutons

- Choisir la tâche qui commence le plus tôt.
- Choisir la tâche dont la durée d'exécution est la plus courte.
- Choisir la tâche ayant le moins de conflits.
- Choisir la tâche qui termine le plus tôt.

## Proposition : Optimalité

L'algorithme glouton basé sur le dernier choix est optimal.
Sa complexité est $\mathcal{O}(n \log n)$.



# Problèmes d'optimisation

## Exercice : Sélection de tâches

On dispose de $n$ tâches à éxecuter. Chaque tâche doit s'éxecuter durant un intervalle de temps donné. On dispose de plusieurs ressources. On veut affecter les tâches aux différentes ressources.

- Données : les intervalles $I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_n = [a_n, b_n]$ associés aux tâches.
- Solution : une affectation $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\}$ telle que pour toute ressource $r \in \{1, \ldots, k\}$, les intervalles des tâches de $\sigma^{-1}(r)$ sont 2 à 2 disjoints.
- Critère d'évaluation : minimiser $k$.

## Exemple : Problème du sac à dos

On dispose de $n$ objets de poids et de valeurs fixés et d'un sac à dos avec une charge maximale. On veut maximiser la valeur des objets transportés.

- Données : les poids $w_1, \ldots, w_n$ et valeurs $v_1, \ldots, v_n$ des $n$ objets et la charge maximale $W$ du sac à dos.
- Solution : $x_1, \ldots, x_n$ avec $x_i \in \{0, 1\}$ tels que $x_1 w_1 + \cdots + x_n w_n \leq W$.
- Critère d'évaluation : maximiser $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.

Variante : possibilité de fractionner les objets, i.e., $x_i \in [0, 1]$.



# Problème du sac à dos fractionnaire

## Choix glouton

- objet le plus léger
- objet de plus grande valeur
- objet de rapport $\frac{\text{valeur}}{\text{poids}}$ maximal

$W = 100$ et

| Objets | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Poids | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| valeur | 20 | 30 | 66 | 40 | 60 |
| $\frac{\text{valeur}}{\text{poids}}$ | 2 | 1,5 | 2,2 | 1 | 1,2 |

## Proposition : Sac à dos

Si les objets sont fractionnables, le choix glouton basé sur le rapport $\frac{\text{valeur}}{\text{poids}}$ conduit à une solution optimale.

## Exercice :

L'algorithme glouton est-il optimal pour le problème du sac à dos si les objets ne sont pas fractionnables ?

# Matroïdes et algorithmes gloutons

**Définition : Matroïde (Whithey, 1935. Indépendance linéaire)**

Un matroïde est un couple $(S, I)$ où $S$ est un ensemble fini non vide et $I$ est une famille non vide de parties de $S$ vérifiant :

- hérédité : si $X \in I$ et $Y \subseteq X$ alors $Y \in I$,
- échange : si $X, Y \in I$ et $|X| < |Y|$ alors $\exists y \in Y \setminus X$ tel que $X \cup \{y\} \in I$.

Une partie $X \in I$ est dite indépendante.
Remarque : toutes les parties indépendantes maximales ont la même taille.

**Exemple : Colonnes indépendantes d'une matrice de $\mathbb{R}^{n \times m}$**

**Exemple : Matroïde de graphe**

Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé.

Soit $M_G = (E, I)$ avec $I = \{A \subseteq E \mid (V, A) \text{ est acyclique}\}$.

$M_G$ est un matroïde.



# Matroïdes et algorithmes gloutons

**Définition : Matroïde valué**

Un matroïde valué est un triplet $M = (S, I, w)$ où $(S, I)$ est un matroïde muni d'une fonction de poids $w : S \to ]0, +\infty[$.

La fonction poids est étendue aux parties de $S$ additivement: pour $X \subseteq S$,

$$w(X) = \sum_{x \in X} w(x)$$

**Problème**

Trouver une partie indépendante de poids maximal.
Remarque : une partie indépendante de poids maximal est une partie indépendante maximale au sens de l'inclusion.



# Matroïdes et algorithmes gloutons

**Définition : Choix glouton et algorithme**

Ajouter l'élément restant de poids maximal qui ne viole pas l'indépendance.
On suppose $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ avec $w(x_1) \geq w(x_2) \geq \cdots \geq w(x_n)$.

```
X <- ∅; i <- 1
Tant que i ≤ n faire
   Invariant : ∃Y ∈ I de poids maximal telle que X ⊆ Y ⊆ X ∪ {x_i, ..., x_n}
   si X ∪ {x_i} ∈ I alors X <- X ∪ {x_i} finsi
   i <- i + 1
ftq
Retourner X
```

**Théorème : Optimalité**

L'algorithme glouton est correct, i.e., à la fin, $X$ est une partie indépendante de poids maximal.

**Exercice : Problème 3 du partiel 2011**



# Algorithmes gloutons

**Caractéristiques**

- Approche descendante (récursive ou itérative)
- Un choix n'est jamais remis en question (pas de backtracking)
- Un choix engendre un seul sous-problème.
- L'optimalité globale n'est pas garantie par les choix gloutons.
- Il faut prouver l'optimalité de la solution obtenue.

**Exemples d'applications**

- Ordonnancement de tâches.
- Codage de Huffman pour la compression
- Arbres couvrants minimaux : Kruskal ou Prim
- Plus courts chemins : Dijkstra
- ...

# Programmation dynamique

**Définition : Programmation dynamique : cadre**

- Une solution optimale s'obtient à partir des solutions optimales de plusieurs sous-problèmes de même nature.
- Les sous-problèmes ne sont pas indépendants.
- Il faut éviter de faire certains calculs plusieurs fois.

**Exemple : Coefficients binomiaux**

Si $0 < k < n$ alors $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Solution : triangle de Pascal.



# Programmation dynamique

**Exemple : Sélection de tâches pondérées**

On dispose de $n$ tâches à éxecuter. Chaque tâche doit s'éxecuter durant un intervalle de temps donné et possède une valeur. On dispose d'une seule ressource. On veut maximiser la somme des valeurs des tâches exécutées.

- Données : les intervalles de temps $I_1 = [a_1, b_1], \ldots, I_n = [a_n, b_n]$ et les valeurs $v_1, \ldots, v_n$ associés aux tâches.
- Solution : $i_1 < \cdots < i_k$ tels que les intervalles $I_{i_1}, \ldots, I_{i_k}$ sont 2 à 2 disjoints.
- Critère d'évaluation : maximiser $v_{i_1} + \cdots + v_{i_k}$.



# Programmation dynamique

**Exemple : Faire l'appoint**

- Le système monétaire $1 = v_1 < v_2 < \cdots < v_k$ est fixé.
- On veut calculer $f(n)$ le nombre minimal de pièces pour la somme $n$.
- Définition récursive (sous-structure optimale) :

$$f(n) = 1 + \min\{f(n - v_1), \ldots, f(n - v_k)\}$$

- Les sous-problèmes $n - v_1, \ldots, n - v_k$ ne sont pas indépendants.
- Solution itérative ascendante (bottom-up) :

```
f[0] <- 0
Pour j de 1 à n faire
   f[j] <- ∞
   pour i de 1 à k faire
      si j ≥ v[i] alors f[j] <- min(f[j], 1+f[j-v[i]]) fsi
   fpour
fpour
```

Complexité $\mathcal{O}(nk)$

- On peut retrouver la solution optimale à partir du tableau `f`.



# Programmation dynamique

**Principes**

- Définir des sous-problèmes et montrer la propriété de sous-structure optimale : Une solution optimale contient des solutions optimales à ces sous-problèmes.
- Définir récursivement la solution.
- Calculer les valeurs optimales.
- Construire la solution optimale en utilisant les valeurs calculées.

**Exemple : Faire l'appoint**

- Sous-problème $g(i, j)$ : nombre minimal de pièces pour la somme $j$ en utilisant uniquement les pièces $v_1, \ldots, v_i$.
- Définition récursive (sous-structure optimale) :

$$g(i,j) = \begin{cases} g(i-1,j) & \text{si } j < v_i \\ \min\{g(i-1,j),\ 1 + g(i, j - v_i)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Mémoïsation

**Définition : Mémoïsation**

- Mémorisation des résultats antérieurs.
- Nécessaire à l'efficacité d'un algorithme récursif (top-down).

**Exemple : Faire l'appoint**

- Solution récursive descendante :

```
Variables globales :
v[1..k] :  valeurs des pièces 1 = v[1] < ··· < v[k]
c[1..k,1..n] :  résultats déjà calculés, initialisés à ∞

fonction g(i,j) :  entier
   si c[i,j] < ∞ alors retourner c[i,j] fsi
   si i = 1 alors c[i,j] <- j; retourner c[i,j] fsi
   si j = v[i] alors c[i,j] <- 1; retourner c[i,j] fsi
   c[i,j] <- g[i-1,j]
   si j > v[i] alors c[i,j] <- min(c[i,j], 1 + g[i,j-v[i]]) fsi
   retourner c[i,j]
```

- Complexité $\mathcal{O}(nk)$
- On peut retrouver la solution optimale à partir du tableau c.



# Remarques

**Remarque : Dynamique versus glouton**

- Dynamique :
  - $+$ : La solution obtenue est optimale.
  - $-$ : Le choix dépend des solutions aux sous-problèmes.
  - $-$ : Il faut résoudre tous les sous-problèmes.
  - $-$ : La complexité dépend du nombre de sous-problèmes.
- Glouton :
  - $+$ : Le choix ne dépend pas des solutions aux sous-problèmes.
  - $+$ : Chaque choix n'engendre qu'un sous-problème à résoudre.
  - $+$ : La complexité est bonne en général.
  - $-$ : La solution obtenue n'est pas forcément optimale.

La propriété de sous-structure optimale est nécessaire aux deux techniques.



# Problème du sac à dos

**Exemple : Sac à dos**

- On suppose que les objets ne sont pas fractionnables et les poids sont entiers.
- Sous-problème : $V(i,j)$ valeur maximale si on n'utilise que les objets 1 à $i$ et que la capacité du sac à dos est $j$.
- Solution récursive :

$$V(i,j) = \begin{cases} V(i-1,j) & \text{si } j < w_i \\ \max\{V(i-1,j),\, v_i + V(i-1,j-w_i)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

- On en déduit facilement une solution itérative ou une solution récursive avec mémoïsation.
- Complexité : $\mathcal{O}(nW)$.



# Suite de multiplications de matrices

**Définition : Suite de multiplications de matrices**

- On considère une suite $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de matrices rectangulaires de dimensions $d_0 \times d_1, d_1 \times d_2, \ldots, d_{n-1} \times d_n$.
- On veut calculer $M_1 \cdot M_2 \cdots M_n$ en minimisant le nombre de multiplications.
- On suppose que le produit d'une matrice $p \times q$ par une matrice $q \times r$ se fait avec $pqr$ multiplications scalaires.

**Exemple :**

Avec la suite de dimensions $13 \times 5, 5 \times 89, 89 \times 3, 3 \times 34$ :

| Parenthésage | Multiplications |
|---|---|
| $((M_1 \cdot M_2) \cdot M_3) \cdot M_4$ | 10582 |
| $(M_1 \cdot M_2) \cdot (M_3 \cdot M_4)$ | 54201 |
| $(M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)) \cdot M_4$ | 2856 |
| $M_1 \cdot ((M_2 \cdot M_3) \cdot M_4)$ | 4055 |
| $M_1 \cdot (M_2 \cdot (M_3 \cdot M_4))$ | 26418 |

**Exercice :**

Proposer un choix glouton. Conduit-il à une solution optimale ?

# Suite de multiplications de matrices

## Méthode naïve

- On calcule le nombre de multiplications pour chaque parenthésage.
- Nombre de parenthésages $P_n$ pour un produit de $n$ matrices : $P_1 = 1$ et si $n > 1$ alors

$$P_n = \sum_{i=1}^{n-1} P_i \cdot P_{n-i}$$

## Exercice : Nombres de Catalan

Montrer que $P_n$ est le $n$-ième nombre de Catalan :

$$P_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \sim \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

## Complexité de la méthode naïve

Exponentielle : $n \cdot P_n$



# Programmation dynamique

## Exemple : Suite de multiplications de matrices

- Sous-problème : $m(i,j)$ nombre optimal de multiplications pour calculer le produit $M_i \cdot M_{i+1} \cdots M_j$.
- Définition récursive : $m(i,i) = 0$ et si $i < j$ alors

$$m(i,j) = \min_{i \le k < j} \Big( m(i,k) + m(k+1,j) + d_{i-1} d_k d_j \Big)$$

- Solution itérative ascendante : Calculs dans l'ordre $s = j - i$ croissant.
- Complexité :

$$\sum_{s=1}^{n-1} (n-s) \cdot s = \frac{n^3 - n}{6}$$

- Reconstruire la solution : pour accélérer, on peut mémoriser dans un tableau l'indice $k$ qui réalise le minimum ci-dessus.



# Programmation dynamique

## Exemple : Suite de multiplications de matrices

- Solution récursive déscendante avec mémoïsation :

```
Variables globales :
d[0..n] :  suite des dimensions
m[1..n,1..n] :  résultats déjà calculés, initialisés à ∞
                sauf diagonale initialisée à 0

fonction calc(i,j) :  entier
   si m[i,j] < ∞ alors retourner m[i,j] fsi
   pour k <- i à j - 1 faire
      x <- d[i-1]·d[k]·d[j]
      si x < m[i,j] alors
         m[i,j] <- min(m[i,j], x + calc(i,k) + calc(k+1,j)
      fsi
   fpour
   retourner m[i,j]
```

- Complexité : au pire comme la version itérative, souvent mieux.
- Initialisation : $\frac{n(n+1)}{2}$
- On peut utiliser la technique d'initialisation virtuelle.



# Initialisation virtuelle

## Initialisation virtuelle

- $t[1..n]$ le tableau à initialiser virtuellement.
- On utilise 2 tableaux auxiliaires $a$ et $b$ de même dimension, et un compteur $c$.
- Initialement, $c = 0$ : $c$ est le nombre d'éléments initialisés dans $t$.
- Pour $1 \le i \le c$, $a[i] = k$ et $b[k] = i$ si l'élément $k$ de $t$ a été initialisé le $i$-ème.
- $t[k]$ initialisé $\iff$ $(1 \le b[k] \le c$ et $a[b[k]] = k)$.

# Diviser pour régner

**Définition : Algorithme générique**

```
fonction DR(x)
   si x est petit alors retourner adhoc(x) fsi
   Décomposer x en instances plus petites x_1,...,x_k
   pour i <- i à k faire y_i <- DR(x_i)
   Combiner y_1,...,y_k pour obtenir la solution y au problème x
   retourner y
```

**Exemple :**

- Recherche dichotomique
- Tri fusion
- Tri rapide



# Diviser pour régner

**Exemple : Multiplication rapide de matrices (Strassen 1969)**

Données : 2 matrices carrées $A$ et $B$ de dimention $n$.
Problème : calculer $C = A \times B$.

Algorithme naïf : $\mathcal{O}(n^3)$ multiplications de scalaires.

Diviser pour régner :
On peut calculer $AB$ avec 7 multiplications de matrices de dimension moitié.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D_2 + D_3 & D_1 + D_2 + D_5 + D_6 \\ \hline D_1 + D_2 + D_4 - D_7 & D_1 + D_2 + D_4 + D_5 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{ll} D_1 = (A_{21} + A_{22} - A_{11})(B_{22} - B_{12} + B_{11}) & D_4 = (A_{11} - A_{21})(B_{22} - B_{12}) \\ D_2 = A_{11}B_{11} & D_5 = (A_{21} + A_{22})(B_{12} - B_{11}) \\ D_3 = A_{12}B_{21} & D_6 = (A_{12} - A_{21} + A_{11} - A_{22})B_{22} \\ & D_7 = A_{22}(B_{11} + B_{22} - B_{12} - B_{21}) \end{array}$$

Récurrence de partition : $t(n) = 7t(n/2) + \Theta(n^2)$.

On en déduit un algorithme en $\mathcal{O}(n^{\log_2 7})$. $\log_2 7 \approx 2,807$.

Coppersmith and Winograd 1986 : $\mathcal{O}(n^{2,376})$.



# Diviser pour régner

**Exercice : Médian d'un tableau**

Soit $T$ un tableau contenant $n$ éléments.
L'élément de rang $k$ de $T$ est celui qui se trouverait en position $k$ si on triait le tableau.
Montrer que l'on peut calculer l'élément de rang $k$ en temps $\mathcal{O}(n)$.

Indication : utiliser la fonction partition du tri rapide.



# Convolution

**Exemple : Convolution**

- Données : 2 suites de réels $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ et $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{p-1})$
- Problème : calculer la suite $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n+p-2})$ où

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Méthode naïve $\mathcal{O}(np)$ opérations (sommes et produits).

Application : lissage en traitement du signal.
La suite $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ est une suite de mesures (un échantillonnage).
Le lissage Gaussien remplace chaque mesure $a_i$ par

$$a'_i = \sum_{-k \le s \le k} w_s a_{i+s} = \frac{1}{Z} \sum_{-k \le s \le k} e^{-s^2} a_{i+s}$$

Il s'agit de convolutions avec la suite de poids (vecteur unitaire)

$$w = \frac{1}{Z}(e^{-k^2}, e^{-(k-1)^2}, \ldots, e^{-1}, 1, e^{-1}, \ldots, e^{-(k-1)^2}, e^{-k^2})$$

# Produit de polynômes

## Exemple : Produit de polynômes

- Données : 2 polynômes $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ et $B = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{p-1} X^{p-1}$
- Problème : calculer le polynôme $C = AB$.

Il s'agit d'une convolution : $C = c_0 + c_1 X + \cdots + c_{n+p-2} X^{n+p-2}$ avec

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Méthode naïve $\mathcal{O}(np)$ opérations (sommes et produits).

## Diviser pour régner : Anatolii Alexeevitch Karatsuba 1960

On suppose $n = p = 2k$. On écrit $A = A_0 + X^k A_1$ et $B = B_0 + X^k B_1$.

On calcule $AB$ avec 3 produits de polynômes de degré $k-1$ (et $\Theta(n)$ additions).

On obtient un algorithme en $\Theta(n^{\log_2 3})$ opérations $\log_2 3 \approx 1,585$.

`http://www.cs.pitt.edu/~kirk/cs1501/animations/Karatsuba.html`



# Produit de polynômes et FFT

## Produit de polynômes et interpolation

On suppose encore $n = p$. On choisit $2n$ valeurs $x_0, \ldots, x_{2n-1}$.

1. Calculer $A(x_i)$ et $B(x_i)$ pour $0 \leq i \leq 2n-1$.
2. Calculer $C(x_i) = A(x_i)B(x_i)$ pour $0 \leq i \leq 2n-1$.
3. Retrouver les coefficients de $C$ à partir des valeurs calculées (interpolation).

Pb : la méthode naïve utilise $\mathcal{O}(n^2)$ opérations pour les évaluations.

Pour les étapes 1 et 3 on utilise la transformée de Fourier rapide.

## Transformée de fourier discrète (DFT)

- Données : $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ polynôme complexe ($a_i \in \mathbb{C}$)
- Problème : calculer $A(\omega_n^s)$ pour $0 \leq s \leq n-1$ où $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ (une racine primitive $n$-ième de l'unité).

## Théorème : Transformée de Fourier rapide (FFT)

On peut calculer la DFT en temps $\mathcal{O}(n \log n)$.



# DFT inverse et FFT

## DFT inverse

Soit $A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme de degré $n-1$.

- Données : $d_k = A(\omega_n^k)$ pour $0 \leq k \leq n-1$ où $\omega_n = e^{i\frac{2\pi}{n}}$
- Problème : calculer $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

## Théorème : DFT inverse et FFT

On peut calculer la DFT inverse par une FFT et donc en temps $\mathcal{O}(n \log n)$.



# Diviser pour régner

## Exemple : Multiplication rapide de grands nombres (Karatsuba)

Problème : calculer $x \cdot y$ de façon efficace.
Taille de $z$ : $|z|$ est le nombre de chiffres dans l'écriture de $z$ en base $b$.

Algorithme naïf : $\mathcal{O}(|x| \cdot |y|)$ (on sait multiplier 2 chiffres en temps constant).

Diviser pour régner :
On peut calculer $xy$ avec 3 multiplications d'entiers de taille $\sim \frac{\max(|x|,|y|)}{2}$.

On en déduit un algorithme en $\mathcal{O}(\max(|x|,|y|)^{\log_2 3})$. $\log_2 3 \approx 1,585$.

Si $|x| \leq |y|$ on peut améliorer en $\mathcal{O}\left(\left\lceil \frac{|y|}{|x|} \right\rceil |x|^{\log_2 3}\right)$.

## Exercice :

1. Montrer que la récurrence de partition exacte pour la multiplication rapide est

$$t(n) = t(\lfloor n/2 \rfloor) + t(\lceil n/2 \rceil) + t(1 + \lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$

   et montrer que $t(n) = \mathcal{O}(n^{\log_2 3})$.
2. Montrer qu'on peut calculer $xy$ avec 5 multiplications d'entiers de taille $1/3$. En déduire un algorithme de multiplication et sa complexité. Généraliser.

# Diviser pour régner

**Exercice : Exponentiation rapide**

Montrer que le nombre de multiplications utilisées pour caculer $a^n$ par exponentiation rapide est $\Theta(\log n)$.

**Exercice : Exponentiation de grands nombres**

Montrer que si on combine l'exponentiation rapide et la multiplication rapide, on obtient un algorithme pour calculer $a^n$ en $\Theta\left(|a|^{\log_2 3} \cdot n^{\log_2 3}\right)$.



# Plan


Introduction

Preuve et terminaison

Complexité

Paradigmes

5 Structures de données (types abstraits)

Dictionnaires et tableaux associatifs

Files de priorité

Gestion des partitions (Union-Find)




# Types abstraits

**Définition : Types abstraits**

Un type abstrait est défini par

- Un ensemble de données,
- La liste des opérations qui permettent de manipuler ces données.

**Exemple : Pile**

Soit T un type. On définit pile(T) par

- Données : listes d'éléments de type T
- Opérations :

| | | |
|---|---|---|
| estVide : | pile(T) $\rightarrow$ booléen | |
| nonVide : | pile(T) $\rightarrow$ booléen | |
| empiler : | pile(T) $\times$ T $\rightarrow$ pile(T) | |
| sommet : | pile(T) $\rightarrow$ T | pré-condition : pile non vide |
| dépiler : | pile(T) $\rightarrow$ pile(T) | pré-condition : pile non vide |
| créer : | $\rightarrow$ pile(T) | constructeur |
| détruire : | pile(T) $\rightarrow$ | |



# Types abstraits

**Exemple : Sémantique pour les opérations de Pile**

La sémantique peut être définie par des équations :

- nonVide(p) $=$ $\neg$ estVide(p)
- estVide(créer())
- nonVide(empiler(p,x))
- sommet(empiler(p,x)) $=$ x
- dépiler(empiler(p,x)) $=$ p

Le plus souvent, la sémantique est donnée par des spécifications moins formelles, sous la forme de pré- et post-conditions pour chaque opération.

# Types abstraits

On peut utiliser un type abstrait sans connaître son implémentation.

**Exemple : Évaluation d'une expression postfixe**

$8\ 3\ 4 \times +\ 5\ 3 - /\ \#$

```
pile(réel) p          Appel au constructeur
s <- nextSymbol()
tq s ≠ # faire
   cas s parmi
      réel : p.empiler(s)
      +    : y <- p.sommet(); p.dépiler(); x <- p.sommet(); p.dépiler();
             p.empiler(x+y)
      log  : x <- p.sommet(); p.dépiler(); p.empiler(log(x))
      ⋮
   fincas
   s <- nextSymbol()
ftq
afficher p.sommet()
```



# Implémentations d'une pile

1. Tableau
   + : toutes les opérations en $\mathcal{O}(1)$ (très efficaces).
   − : l'implémentation n'est pas vraiment dynamique.
2. Liste chaînée
   + : toutes les opérations en $\mathcal{O}(1)$ (un peu moins efficaces).
   + : implémentation dynamique.



# Types abstraits

**Exercice : Enlever la récursivité**

1. Écrire une fonction récursive pour évaluer une expression préfixe.
   $/ + 8 \times 3\ 4 - 5\ 3$
2. Écrire une version itérative de cette fonction.
3. Écrire une version non récursive du tri rapide.

**Exercice : File**

1. Définir le type abstrait File.
2. Décrire des implémentations du type File.
3. Implémenter une file à l'aide de 2 piles.
   Calculer le coût amorti d'une opération.
4. Implémenter une pile à l'aide de 2 files.
   Calculer le coût amorti d'une opération.



# Types abstraits récursifs

**Exemple : Arbre binaire**

Soit T un type. On définit arbre(T) par

- Données : définition récursive
  - Base : arbre vide, noté () ou null ou nil ...
  - Induction : arbre composé d'un élément (racine) de type T et de deux sous-arbres (gauche et droit).
- Opérations :

| | | |
|---|---|---|
| estVide : | arbre(T) $\rightarrow$ booléen | |
| nonVide : | arbre(T) $\rightarrow$ booléen | |
| faireArbre : | T $\times$ arbre(T)$^2$ $\rightarrow$ arbre(T) | |
| racine : | arbre(T) $\rightarrow$ T | pré-condition : arbre non vide |
| fg : | arbre(T) $\rightarrow$ arbre(T) | pré-condition : arbre non vide |
| fd : | arbre(T) $\rightarrow$ arbre(T) | pré-condition : arbre non vide |
| créer : | $\rightarrow$ arbre(T) | constructeur |
| détruire : | arbre(T) $\rightarrow$ | |

# Types abstraits récursifs

**Exemple : Expression infixes parenthésées**

Construction de l'arbre représentant une expression infixe.
Syntaxe : exp ::= réel | (exp op-bin exp) | op-un exp
Exemple : $(((8+3)\times 4)/(5-3))$

```
fonction expInfixe () :  arbre
Début
  s <- nextSymbol()
  cas s parmi
    réel   : retourner faireArbre(s,nil,nil)
    op-un  : x <- expInfixe()
             retourner faireArbre(s,x,nil)
    (      : x <- expInfixe()
             s <- nextSymbol(); si s ∉ op-bin alors ERREUR fsi
             y <- expInfixe()
             t <- nextSymbol(); si t ≠ ) alors ERREUR fsi
             retourner faireArbre(s,x,y)
  fin cas
Fin
```



# Types abstraits récursifs

**Exercice : Évaluation**

Écrire une fonction pour évaluer une expression représentée par un arbre.

**Exercice : Expressions avec priorités**

Écrire une fonction pour construire l'arbre représentant une expression infixe en respectant les règles de priorité et d'associativité.
Syntaxe : exp ::= réel | exp op-bin exp | op-un(exp) | (exp)
Exemple : $(8+3\times 4)/(5-3)$

**Exercice : Axiomatisation**

Donner l'axiomatisation du type abstrait arbre.

**Exercice : Implémentation**

Proposez des implémentations à l'aide de tableaux ou de pointeurs/références pour le type arbre.
Comparez leurs avantages et inconvénients.



# Plan


Introduction

Preuve et terminaison

Complexité

Paradigmes

Structures de données (types abstraits)

6 Dictionnaires et tableaux associatifs
- Type abstrait
- Implémentation par tableaux et arbres de recherche
- Tables de hachage
- Arbres équilibrés $a$–$b$

Files de priorité




# Dictionnaire / Tableau associatif

**Exemple : Serveur pédagogique (PHP)**

Tableau / dictionnaire des mots de passe : `$password`

- clé : string (email)
- valeur : string (mot de passe)

```
if ($password["paul.gastin@lsv.ens-cachan.fr"] == "TropFacile") ...
```

Tableau des notes : `$notes`

- clé : entier (identifiant étudiant, e.g., 2012043 → Marie)
- valeur : Tableau des notes : `$notes[2012043]`
  - clé : entier (identifiant du cours, e.g., 2012050 → Algorithmique)
  - valeur : réel (note)

```
$notes[$id_etud][$id_cours] = 15
```

# Dictionnaire / Tableau associatif

## Définition : Dictionnaire / tableau associatif

Soit Tclé un type de clés et Tval un type de valeurs.
On définit le type dico(Tclé, Tval) par

- Données : Ensemble de couples (clé,val).
- Opérations :

$$\begin{aligned}
\text{estVide} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \to \text{booléen} \\
\text{chercher} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \times \text{Tclé} \to \text{Tval} \\
\text{insérer} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \times \text{Tclé} \times \text{Tval} \to \text{dico(Tclé,Tval)} \\
\text{supprimer} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \times \text{Tclé} \to \text{dico(Tclé,Tval)} \\
\text{créer} &: \to \text{dico(Tclé,Tval)} \\
\text{détruire} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \to
\end{aligned}$$

On pourra retourner une valeur spéciale UNSET lors d'une recherche infructueuse.

Donner plusieurs spécifications "naturelles" pour insérer.



# Dictionnaire / Tableau associatif

## Autres opérations

$$\begin{aligned}
\text{isset} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \times \text{Tclé} \to \text{booléen} \\
\text{unset} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \times \text{Tclé} \to \\
\text{taille} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \to \text{entier} \\
\text{clé_de_val} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \times \text{Tval} \to \text{Tclé} \\
\text{trierClé} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \to \text{dico(Tclé,Tval)} \\
\text{trierVal} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \to \text{dico(Tclé,Tval)} \\
\text{fusionner} &: \text{dico(Tclé,Tval)}^2 \to \text{dico(Tclé,Tval)} \\
\text{scinder} &: \text{dico(Tclé,Tval)} \times \text{Tclé} \to \text{dico(Tclé,Tval)}^2
\end{aligned}$$

## Itérateur

```
trierValDecroissant(notes[idEtudiant])
ectsValid[idEtudiant] <- 0
Pour Chaque (idCours,note) dans notes[idEtudiant] faire
   si note >= 10 alors
      ectsValid[idEtudiant] <- ectsValid[idEtudiant] + ects[idCours]
   finsi
FinPour
```



# Tableau non trié

## Tableau classique de couples (clé,valeur)

- Doubler la taille du tableau lorsqu'il est plein.
- Complexité :

| | meilleur | pire | moyen |
|---|---|---|---|
| recherche | 1 | $n$ | $n/2$ |
| insertion | 1 | $n$ | $n/2$ |
| suppression | 1 | $n$ | $n/2$ |



# Tableau trié

## Tableau classique de couples (clé,valeur) trié sur la clé

- Doubler la taille du tableau lorsqu'il est plein.
- Complexité :

| | meilleur | pire | moyen |
|---|---|---|---|
| recherche | 1 | $\log n$ | $\log n$ |
| insertion | 1 | $n$ | $n/2$ |
| suppression | 1 | $n$ | $n/2$ |

- Si le type Tclé est numérique, on peut améliorer la recherche en faisant une interpolation :

$$g + (d - g) \times \frac{\text{clé} - t[g].\text{clé}}{t[d].\text{clé} - t[g].\text{clé}}$$

Si les clés du dictionnaire sont uniformément réparties, la complexité moyenne de la recherche est en $\mathcal{O}(\log(\log n))$.

# Arbre binaire de recherche

## Arbre binaire de recherche (ABR)

- Binaire : chaque nœud a 0, 1 ou 2 fils.
- de recherche : pour chaque nœud $x$ :

$$\{\text{clés de } x.\text{fg}\} < x.\text{clé} < \{\text{clés de } x.\text{fd}\}$$

- Implémentation dynamique
- Complexité :

| | meilleur | pire | moyen |
|---|---|---|---|
| recherche | 1 | $n$ | $\log n$ |
| insertion | 1 | $n$ | $\log n$ |
| suppression | 1 | $n$ | $\log n$ |

- On peut aussi utiliser une sentinelle.

## Exercice : ABR

Implémenter les primitives d'un dictionnaire avec un ABR.



# Arbres binaires de recherche

## Exercice : Complexité en moyenne

1. Calculer la hauteur moyenne d'un ABR construit aléatoirement.
   Univers : $\mathfrak{S}_n$ avec distribution uniforme.
   Hauteur : $H_n : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}$ où $H_n(\sigma)$ (pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$) est la hauteur de l'ABR obtenu par insertions successives de $\sigma(1)$, $\sigma(2)$, ..., $\sigma(n)$.
   Attention : ne pas confondre avec une distribution uniforme sur les ABR contenant les clés $\{1, \ldots, n\}$.
2. Calculer le coût moyen d'une recherche fructueuse/infructueuse dans un ABR construit aléatoirement.



# Arbres binaires de recherche

## Exercice : ABR balisés

Dans un ABR balisé, les couples (clé,val) ne sont qu'aux feuilles et les nœuds internes ont tous exactement 2 fils et contiennent des balises qui permettent d'orienter la recherche.
Si $x$ est un nœud interne, alors

$$\{\text{clés de } x.\text{fg}\} < x.\text{balise} \leq \{\text{clés de } x.\text{fd}\}$$

1. Montrer que $n(a) = 2f(a) - 1$ si $a$ est un ABR balisé.
2. Écrire des procédures d'insertion et de suppression dans un ABR balisé.
3. Écrire une procédure pour transformer en temps linéaire un ABR balisé en un ABR classique ayant la même structure.
4. Écrire la procédure inverse.



# Arbres de recherche équilibrés

## Exemples : Arbres équilibrés

- Arbres $a$-$b$
- Arbres rouge et noir
- Arbres AVL (Adelson-Velsky et Landis)

## Arbres de recherche équilibrés

- La hauteur d'un arbre contenant $n$ nœuds est au pire $\mathcal{O}(\log n)$.
- Implémentation dynamique
- Complexité :

| | meilleur | pire | moyen |
|---|---|---|---|
| recherche | 1 | $\log n$ | $\log n$ |
| insertion | $\log n$ | $\log n$ | $\log n$ |
| suppression | $\log n$ | $\log n$ | $\log n$ |

# Tables de hachage

Objectif : implémenter les primitives principales du type abstrait dictionnaire en temps constant.

- Primitives: recherche, insertion, modification, suppression.
- Complexité : en moyenne et même si possible au pire.

**Définition : Table de hachage**

Soit `d:dico(Tclé,Tval)` un dictionnaire.

On fixe un entier $m > 0$ et on choisit une fonction de hachage

$$h : \text{Tclé} \to [m] = \{0, \dots, m-1\}.$$

On considère un tableau $t$ de taille $m$.

On vise une implémentation de `d[clé]` par `t[h(clé)]`.

Il faut résoudre les collisions : $h(c_1) = h(c_2)$ avec $c_1 \neq c_2$.

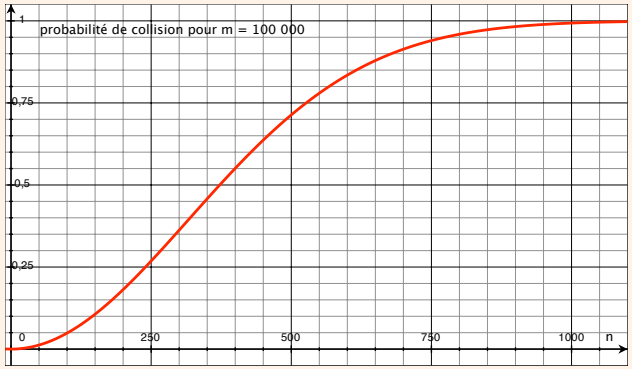


# Tables de hachage

**Exercice : Paradoxe des anniversaires (Richard von Mises)**

Sous l'hypothèse de hachage uniforme (voir plus loin) montrer que si on tire $n$ clés, la probabilité qu'il y ait au moins une collision est

$$1 - \frac{m!}{(m-n)!} \cdot \frac{1}{m^n} \approx 1 - e^{-\frac{n^2}{2m}}.$$






# Chaînage séparé

`t[i]` pointe sur une liste chaînée de couples `(clé,val)` tels que `h(clé)=i`.

**Recherche**

```
fonction chercher (t:Table, clé:Tclé) :Tval
Spec :  retourne la valeur associée à la clé dans la table t
Début
   p <- t[h(clé)]
   tant que p ≠ NULL faire
      si p->clé = clé alors retourner p->val finsi
      p <- p->suiv
   ftq
   retourner UNSET
Fin
```

**Exercice :**

Écrire les fonctions d'insertion et de suppression.



# Complexité du chaînage séparé

**Définition : Hachage uniforme**

Soit $\mathcal{U}$ (=`Tclé`) l'univers des clés et $p : \mathcal{U} \to [0,1]$ une distribution de probabilité.
Note : en général, $p$ n'est pas uniforme (ex: table des symboles d'un compilateur)
Le hachage $h : \mathcal{U} \to [m]$ est uniforme si $\forall i \in [m]$, $p(h = i) = \sum_{k \in h^{-1}(i)} p(k) = \frac{1}{m}$
(et cela doit rester vrai sur $\mathcal{U} \setminus F$ pour toute "petite" partie $F \subseteq \mathcal{U}$.)

**Définition : Facteur de remplissage**

$\alpha = \frac{n}{m}$ où $n$ est le nombre de clés dans la table.

**Proposition : Recherche, recherche infructueuse (avec table fixée)**

Si le hachage est uniforme, le nombre moyen de comparaisons de clés lors d'une recherche est $\leq \alpha$.
Idem pour une recherche infructueuse.
Hypothèses : la table est fixée (mais arbitraire),
la clé cherchée est tirée aléatoirement dans $\mathcal{U}$.

# Complexité du chaînage séparé

**Proposition : Recherche fructueuse (table construite aléatoirement)**

Si le hachage est uniforme, le nombre moyen de comparaisons de clés lors d'une recherche fructueuse est $\leq 1 + \alpha/2$.
Hypothèses : La table est construite par insertion de $n$ clés tirées aléatoirement (et supposées 2 à 2 distinctes).
La clé cherchée est tirée uniformément parmi les $n$ clés de la table.

**Corollaire : Temps moyen constant**

Si le hachage est uniforme et que $\alpha = \mathcal{O}(1)$ alors les opérations sont en moyenne en $\mathcal{O}(1)$.

**Exercice :**

La table étant fixée, montrer que le nombre moyen de comparaisons de clés lors d'une recherche fructueuse est entre $(1+\alpha)/2$ et $(n+1)/2$.
Hypothèse : La clé cherchée est tirée uniformément parmi les $n$ clés de la table.



# Problèmes du hachage uniforme

- On ne maîtrise pas l'utilisation d'un dictionnaire et donc pas l'ensemble des clés utilisées dans une application.
- On ne peut donc pas faire d'hypothèses sur la distribution de probabilité de l'univers de clés.
- On ne peut pas construire une fonction de hachage uniforme indépendante des utilisations d'un dictionnaire.
- $|\texttt{TClé}| >> m$ : pour toute fonction de hachage $h\colon \texttt{TClé} \to [m]$ et pour tout $n$ (réaliste) il existe une suite de $n$ clés qui ont toutes la même image par $h$.
- Si la fonction de hachage est connue, elle peut facilement être attaquée.

Solution : choisir aléatoirement la fonction de hachage.



# Hachage universel

**Définition : Hachage universel**

On fixe l'ensemble TClé des clés et un entier $m > 0$.

Une famille $H$ de fonctions de hachage de TClé dans $[m]$ est universelle si

$\forall c_1, c_2 \in \texttt{TClé}$ avec $c_1 \neq c_2$ on a $\quad |\{h \in H \mid h(c_1) = h(c_2)\}| \leq \frac{|H|}{m}$

Si on munit $H$ de la distribution de probabilité uniforme,

$\forall c_1, c_2 \in \texttt{TClé}$ avec $c_1 \neq c_2$ on a $\quad p(h(c_1) = h(c_2)) \leq \frac{1}{m}$

**Théorème : Chaînage séparé et hachage universel**

Soit $H$ une famille universelle de fonctions de hachage de TClé dans $[m]$.

Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \texttt{TClé}$ une suite arbitraire de clés (2 à 2 $\neq$). Soit $k \in \texttt{TClé}$.

Si la fonction de hachage est choisie aléatoirement dans $H$ alors
la complexité moyenne d'une opération est $\mathcal{O}(1+\alpha)$ où $\alpha = \frac{n}{m}$.

Opérations : recherche, insertion, suppression, modification.



# Familles universelles

On suppose qu'une clé peut être codée par une suite de $q$ bits : $|\texttt{TClé}| \leq 2^q$.

**Définition : Hachage universel**

Soit $m$ un nombre premier et $p = \lfloor \log_2 m \rfloor$.

On tronçonne une clé $x \in \texttt{TClé}$ en $k$ blocs de $p$ bits ($kp \geq q$):
$x = (x_1, \ldots, x_k)$ et on interprète chaque $x_i$ comme un entier dans $[2^p]$.

On choisit aléatoirement $a = (a_1, \ldots, a_k) \in [m]^k$.

On définit la fonction $h_a$ par

$$\begin{aligned} h_a(x) &= a \cdot x \mod m \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k} a_i x_i \mod m \end{aligned}$$

**Théorème : Hachage universel**

La famille $H_{m,k} = \{h_a \mid a \in [m]^k\}$ est universelle.

# Hachage universel en pratique

Lors de la création d'un dictionnaire:

- Choisir un nombre premier $m$ (e.g., $m = 257$).
- Choisir aléatoirement une fonction de hachage $h \in H_{m,k}$, i.e., un tuple $a \in [m]^k$.

Lorsque le facteur de remplissage augmente (e.g., $\alpha \geq 1$) ou que certaines listes sont trop longues:

- Choisir un nouveau nombre premier $m' \geq 2m$.
  Choisir $m'$ dans une table ou avec un algo en temps $\mathcal{O}(m)$.
- Choisir aléatoirement une nouvelle fonction de hachage dans $H_{m',k}$, i.e., un tuple $a' \in [m']^k$.
- Redistribuer les couples (clé,valeur) dans la nouvelle table.

**Exercice : rehashing**

Montrer que le coût amorti du rehashing est constant.



# Hachage universel

**Exercice : Produit de matrices**

Soit $M \in \{0,1\}^{p \times q}$ une matrice booléenne.

On interprète une clé de q bits comme un vecteur $x \in \{0,1\}^q$.

On définit la fonction de hachage $h_M(x) = Mx \mod 2$.

On interprète ce vecteur de $p$ bits comme un entier.

Montrer que la famille $H = \{h_M \mid M \in \{0,1\}^{p \times q}\}$ est universelle.

Montrer comment calculer $h_M(x)$ efficacement.



# Hachage parfait

Hypothèse : L'ensemble $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ des clés du dictionnaire est fixé.
Objectif : complexité au pire en temps constant.

**Exemples :**

- Les mots clés d'un langage de programmation.
- Les étudiants inscrits sur le serveur pédagogique durant une année universitaire.

**Problème.**

On cherche un algorithme qui, étant donné un ensemble $S$ de $n$ clés, construit une fonction de hachage injective $h\colon S \to [m]$ telle que

- le taux de remplissage est bon, e.g., $\frac{1}{2} \leq \alpha$ et donc $m \leq 2n$,
- La construction de la fonction $h$ est efficace : $\mathcal{O}(n)$ en moyenne.
- Pour chaque clé $x$, le calcul de $h(x)$ est efficace : $\mathcal{O}(1)$ (indépendant de $n$).



# Hachage parfait

Soit $H_m$ une famille universelle de fonctions de hachage dans $[m]$.
Soit $X(h) = |\{(x,y) \in S^2 \mid x \neq y \text{ et } h(x) = h(y)\}$.

**Lemme :**

- $E(X) \leq \frac{n(n-1)}{m}$
- $\mathbb{P}(\text{non injective}) \leq \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{m}$

**Première solution**

S'il n'y avait pas la contrainte $m \leq 2n$ (ou $m = \mathcal{O}(n)$) on aurait l'algorithme

```
m <- n(n-1)
Répéter choisir h aléatoirement dans H_m
Jusqu'à trouver une fonction h injective
```

Chaque tirage est indépendant (Bernoulli).
La probabilité de succès est $p \geq \frac{1}{2}$.
Le nombre moyen de tirages pour un succès est $\frac{1}{p} \leq 2$.

# Hachage parfait

## Deuxième solution

```
Répéter choisir h aléatoirement dans H_n
Jusqu'à avoir X(h) ≤ 2n

Pour chaque i ∈ [n] faire n_i <- 0; S_i <- ∅ fpour
Pour chaque x ∈ S faire i <- h(x); n_i++; S_i <- S_i ∪ {x} fpour
s_0 <- 0
Pour chaque i ∈ [n] faire
   m_i <- n_i(n_i − 1); s_{i+1} <- s_i + m_i
   Répéter choisir h_i aléatoirement dans H_{m_i}
   Jusqu'à avoir h_i injective sur S_i
fpour

Fonction g(TClé):[s_n]
   i <- h(x)
   Retourner s_i + h_i(x)
```

## Théorème : Hachage parfait

L'algorithme ci-dessus termine en moyenne en temps $\mathcal{O}(n)$.
La fonction $g$ est injective et $s_n \leq 2n$.



# Autres fonctions de hachage

## Définition : Hachage par division

$h : \mathbb{N} \to [m]$ définie par $h(k) = k \mod m$.

- Éviter $m = 2^p$ ou $m = 10^p$ car $h(k)$ ne dépendrait que des bits de poids faible
- Éviter $m = |\Sigma| - 1$ car $h(u_\ell \cdots u_0)$ serait invariant par permutation des lettres
- Choisir un nombre premier éloigné d'une puissance de 2.



# Autres fonctions de hachage

## Définition : Hachage par multiplication

Choisir $\theta \in ]0, 1[$ et définir $h(k) = \lfloor m \cdot \text{frac}(k \cdot \theta) \rfloor \in [m]$
où $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ est la partie fractionnaire d'un réel $x \geq 0$.

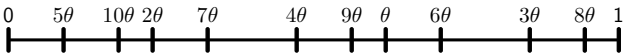
## Théorème : Vera Turan Sos (1957)

Soit $\theta > 0$ un nombre irrationnel. Soit $0 < a_1 < \cdots < a_n < 1$ la suite ordonnée des valeurs $\text{frac}(\theta)$, $\text{frac}(2\theta)$, ..., $\text{frac}(n\theta)$.

Les segments $[0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_n, 1]$ ont au plus 3 longueurs différentes.
Le prochain point $\text{frac}((n+1)\theta)$ tombe dans l'un des plus grands segments.

Conséquence : le hachage par multiplication répartit bien les clés $\{1, \ldots, n\}$.

Avec $\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ :




- On choisit pour $m$ une puissance de 2 : $m = 2^p$
- On utilise $q$ bits significatifs pour $\theta$ : $\lfloor \theta \cdot 2^q \rfloor$
  $q$ : taille d'un mot mémoire.
- Il suffit d'une multiplication entière $k \cdot \lfloor \theta \cdot 2^q \rfloor$ et de décalages.



# Adressage ouvert

## Définition : Fonction de hachage

$$h : \mathcal{U} \to \mathfrak{S}_m \qquad \text{ou} \qquad h : \mathcal{U} \times [m] \to [m]$$

Pour une clé $k \in \mathcal{U}$ on utilise la séquence de sondage $h(k)$, i.e.,

$$h(k, 0), h(k, 1), \ldots, h(k, m-1)$$

## Recherche

```
fonction chercher (t:Table, clé:Tclé) :Tval
Spec :  retourne la valeur associée à la clé dans la table t
Début
   pour i <- 0 à m-1 faire
      j <- h(clé,i)
      si t[j].clé = clé alors retourner t[j].val finsi
      si t[j].clé = cléVide alors retourner UNSET finsi
   fpour
   retourner UNSET
Fin
```

# Adressage ouvert

**Exercice :**

1. Écrire une fonction pour l'insertion.
2. Écrire une fonction pour la suppression.
   Utiliser une constante `cléEnlevée`.

**Adressage ouvert versus chaînage séparé**

+ : Pas d'espace perdu pour les pointeurs.
– : La table ne peut pas contenir plus de $m$ couples `(clé,val)` : $\alpha = \frac{n}{m} \leq 1$.
– : (rehashing) Lorsque le taux de remplissage s'approche de 1,
il faut augmenter la taille de la table et re-distribuer les clés.



# Sondage linéaire

**Définition : Sondage linéaire**

Soit $h_1 : \mathcal{U} \to [m]$ une fonction de hachage ordinaire.
On définit $h : \mathcal{U} \times [m] \to [m]$ par

$$h(k,i) = (h_1(k) + i) \mod m$$

+ : Simplicité.
– : Problème de la grappe forte.
– : Seulement $m$ séquences de sondage.



# Sondage quadratique

**Définition : Sondage quadratique**

Soit $h_1 : \mathcal{U} \to [m]$ une fonction de hachage ordinaire.
On définit $h : \mathcal{U} \times [m] \to [m]$ par

$$h(k,i) = (h_1(k) + c_1 \cdot i + c_2 \cdot i^2) \mod m$$

En choisisssant $c_1$, $c_2$ et $m$ pour que la séquence de sondage soit une permutation.

+ : Plus efficace que le sondage linéaire.
– : Seulement $m$ séquences de sondage.
– : Problème de la grappe faible.

**Exercice :**

Montrer qu'avec $c_1 = c_2 = 1/2$ et $m = 2^p$ la séquence de sondage est une permutation.



# Double hachage

**Définition : Double hachage**

Soit $h_1 : \mathcal{U} \to [m]$ une fonction de hachage ordinaire.
Soit $h_2 : \mathcal{U} \to [m]$ une fonction de hachage ordinaire.
On définit $h : \mathcal{U} \times [m] \to [m]$ par

$$h(k,i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \mod m$$

+ : Une des meilleures méthodes.
+ : $\Theta(m^2)$ séquences de sondage.

**Exercice :**

Montrer que si $h_2$ génère des valeurs premières avec $m$ alors les séquences de sondage sont des permutations.

**Exemple : Double hachage**

- $h_1(k) = k \mod m$ avec $m$ premier et
  $h_2(k) = 1 + (k \mod m')$ avec $1 < m' < m$.
- $h_1(k) = k \mod m$ avec $m = 2^p$ et $h_2(k)$ impair.

# Complexité de l'adressage ouvert

**Définition : Hachage uniforme**

Soit $\mathcal{U}$ l'univers des clés et $p : \mathcal{U} \to [0,1]$ une distribution de probabilité.
Note : en général, $p$ n'est pas uniforme (ex: table des symboles d'un compilateur)
Le hachage $h : \mathcal{U} \to \mathfrak{S}_m$ est uniforme si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_m$,

$$p(h = \sigma) = \sum_{k \in h^{-1}(\sigma)} p(k) = \frac{1}{m!}$$

**Définition : Facteur de remplissage**

$\alpha = \dfrac{n}{m}$ où $n$ est le nombre de clés dans la table.

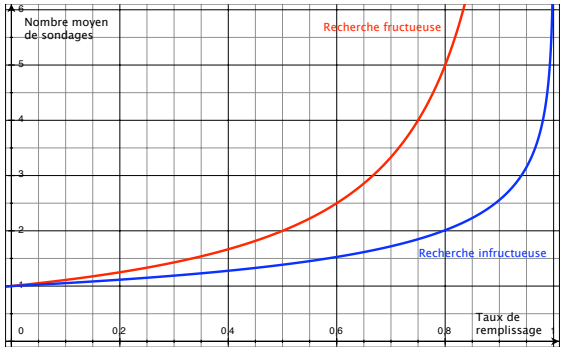


# Complexité de l'adressage ouvert

**Proposition : Recherche**

Si le hachage est uniforme, le nombre moyen de sondages

- lors d'une recherche infructueuse est $\dfrac{m+1}{m+1-n} \sim \dfrac{1}{1-\alpha}$.
- lors d'une recherche fructueuse est $\dfrac{m+1}{n}(H_{m+1} - H_{m-n+1}) \leq \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{1}{1-\alpha}$
  où $H_j = 1 + 1/2 + \cdots + 1/j$ est le $j$ème nombre harmonique.






# Arbres équilibrés $a$–$b$

**Définition : Arbres $a$–$b$ avec $a \geq 2$ et $b \geq 2a - 1$ ou $b \geq 2a$**

- La racine, possède entre 1 et $b - 1$ clés.
- Chaque nœud autre que la racine possède entre $a - 1$ et $b - 1$ clés.
- Les nœuds internes ont un fils de plus que de clés.
- Toutes les feuilles sont à la même profondeur.
- C'est un arbre de recherche.

**Notations : Soit $x$ un nœud de l'arbre**

- d(x) : degré du nœud x, i.e., nombre de fils
- x.c[1],. . . ,x.c[d(x)-1] : clés du nœud x
- x.f[1],. . . ,x.f[d(x)] : fils du nœud x

**Arbre de recherche**

{clés de x.f[1]} < x.c[1] < ⋯ < x.c[d(x)-1] < {clés de x.f[d(x)]}

Convention : x.c[0] $= -\infty$ et x.c[d(x)] $= +\infty$



# Recherche dans un arbre $a$–$b$

**Algorithme de recherche**

```
fonction chercherAB (x:arbre, clé:Tclé) :Tval
Spec :  retourne la valeur associée à la clé dans l'arbre
Début
   si x.estVide() alors retourner UNSET finsi
   Trouver 1 ≤ i ≤ d(x) tel que x.c[i-1] < clé ≤ x.c[i]
   si clé = x.c[i] alors retourner x.val[i] finsi
   retourner chercherAB(x.f[i], clé)
Fin
```

**Lemme : Hauteur et complexité**

Soit $x$ un arbre de hauteur $h$ comportant $n$ clés. on a

$$\log_b(n+1) \leq h \leq \log_a(n+1) + 1 - \log_a 2$$

La complexité au pire de la recherche est en $\log_a b \times \log_2 n$.

$\log_2 3 \approx 1,58 \quad \log_2 4 = 2 \quad \log_3 5 \approx 1,46 \quad \log_3 6 \approx 1,63 \quad \log_4 7 \approx 1,4$

# Insertion dans un arbre $a$–$b$

- Exemple d'insertion dans un arbre 2-4.
- Éclatement d'un nœud (trop) plein.
- Méthode préventive à la descente.
  + : Implémentation simple en récursif ou itératif.
  – : Des éclatements inutiles qui augmentent les problèmes à la suppression.
  – : Nécessite $b \geq 2a$.
- Méthode curative à la remontée.
  + : Il suffit de $b \geq 2a - 1$.
  + : Pas d'éclatement inutile.
  – : Implémentation plus compliquée.
- Complexité $\mathcal{O}(\log n)$.



# Suppression dans un arbre $a$–$b$

- Exemple de suppression dans un arbre 2-4.
- Fusion d'un nœud avec son frère.
- Partage entre un nœud et son frère.
  Le partage peut aussi être utilisé à l'insertion car il arrête le ré-équilibrage.
  Si on a le choix, on fait plutôt un partage qu'une fusion ou un éclagement.
- Méthode préventive à la descente.
  + : Implémentation simple en récursif ou itératif.
  – : Des fusions inutiles qui augmentent les problèmes à l'insertion.
  – : Nécessite $b \geq 2a$.
- Méthode curative à la remontée.
  + : Il suffit de $b \geq 2a - 1$.
  + : Pas de fusion inutile.
  – : Implémentation plus compliquée.
- Complexité $\mathcal{O}(\log n)$.



# Coût amorti en ré-équilibrages

**Théorème : Ré-équilibrages pour la méthode curative avec $b \geq 2a \geq 4$.**

On considère une suite de $I$ insertions et $S$ suppressions à partir d'un arbre vide. On note $P$ le nombre de partages, $E$ le nombre d'éclatements et $F$ le nombre de fusions. On a

$$E + F + P \leq \frac{2a-1}{a}(I + S)$$

Le coût amorti en ré-équilibrages est donc $\leq \dfrac{2a-1}{a} \leq 2$.

**Exercice :**

Calculer le coût amorti en ré-équilibrages pour les arbres 2-3.



# Arbres $a$–$b$

**Implémentation d'un nœud**

- Tableau trié.
  + : Implémentation simple.
  + : Recherche en $\log_2 b$ dans le nœud.
  – : Gaspillage de place.
  – : décalages et recopies pour le partage, la fusion et l'éclatement: $\mathcal{O}(b)$
- Liste chaînée avec sentinelle $+\infty$.
  + : Espace optimisé.
  – : Recherche en $\mathcal{O}(b)$.
  – : Il faut calculer le degré ou le mémoriser dans tous les nœuds.
- Arbre binaire équilibré
  + : Espace optimisé.
  + : Recherche en $\mathcal{O}(\log_2 b)$.
  – : Il faut parfois rééquilibrer l'arbre avec des rotations.

**Exemple :**

Implémentation en Java du type abstrait dictionnaire avec des arbres $a$–$b$:
`http://www.lsv.ens-cachan.fr/~gastin/Algo/monDico.java`

# Arbres $a$–$b$

**Exercice :**

Comparer les arbres 2-4 et les arbres bicolores.

**Exercice :**

Écrire les algorithmes d'union et de scission pour les arbres $a$–$b$.



# Plan


Introduction

Preuve et terminaison

Complexité

Paradigmes

Structures de données (types abstraits)

Dictionnaires et tableaux associatifs

7 Files de priorité
- Tas binaires
- Tas binomiaux
- Tas de Fibonacci

Gestion des partitions (Union-Find)




# Type abstrait File de priorité

**Définition : File de priorité**

Soit Tprio un type ordonné et Tinfo un type arbitraire.
On définit le type FPrio(Tprio, Tinfo) par

- Données : Ensemble de couples (prio,info).
- Opérations :

| | | |
|---|---|---|
| créer : | | $\to$ FPrio(Tprio,Tinfo) |
| détruire : | FPrio(Tprio,Tinfo) | $\to$ |
| estVide : | FPrio(Tprio,Tinfo) | $\to$ booléen |
| insérer : | FPrio(Tprio,Tinfo) $\times$ Tprio $\times$ Tinfo | $\to$ FPrio(Tprio,Tinfo) |
| minimum : | FPrio(Tprio,Tinfo) | $\to$ Tprio $\times$ Tinfo |
| supprimerMin : | FPrio(Tprio,Tinfo) | $\to$ FPrio(Tprio,Tinfo) |
| fusionner : | FPrio(Tprio,Tinfo)$^2$ | $\to$ FPrio(Tprio,Tinfo) |

Dans certains cas, on peut vouloir modifier la priorité d'un couple pointé par $p$.

| | | |
|---|---|---|
| diminuerPrio : | FPrio(Tprio,Tinfo) $\times$ Ptr $\times$ Tprio | $\to$ FPrio(Tprio,Tinfo) |
| augmenterPrio : | FPrio(Tprio,Tinfo) $\times$ Ptr $\times$ Tprio | $\to$ FPrio(Tprio,Tinfo) |
| supprimer : | FPrio(Tprio,Tinfo) $\times$ Ptr | $\to$ FPrio(Tprio,Tinfo) |



# Implémentation d'une file de priorité

**Définition : Tournoi**

Arbre dans lequel la priorité d'un noeud est inférieure aux priorités contenues dans ses sous-arbres.

**Définition : Arbre parfait**

Arbre dans lequel tous les niveaux sont pleins sauf éventuellement le dernier dont les feuilles sont à gauche.

Un arbre parfait s'implémente efficacement avec un tableau.

**Définition : Tas binaire = tournoi binaire parfait**

Implémentation d'une file de priorité avec un tas binaire.

F.n : nombre d'éléments dans la file de priorité
F.prio : tableau [1..Max] des priorités
F.info : tableau [1..Max] des informations associées

Pour simplifier on oublie l'information associée à l'élément.

# File de priorité et tas binaire

## Implémentation

```
fonction estVide () :  booléen
   retourner (F.n = 0)

fonction minimum () :  Tprio
   retourner (si F.n > 0 alors F.prio[1] sinon prioVide)

Procédure insérer (c:Tprio)
   F.n++; F.prio[F.n] <- c; F.remonter(F.n)

Procédure remonter (p:Int)
   tant que p > 1 et F.prio[p div 2] > F.prio[p] faire
      échanger(F.prio[p div 2], F.prio[p]); p <- p div 2
   fintq

Procédure diminuerPrio (p:Int, c:Tprio)
   si 1 ≤ p ≤ F.n et c < F.prio[p] alors
      F.prio[p] <- c; F.remonter(p)
   fsi
```



# File de priorité et tas binaire

## Implémentation

```
Procédure supprimerMin ()
   si F.n > 0 alors
      F.prio[1] <- F.prio[F.n]; F.n--; F.descendre(1)
   fsi

Procédure descendre (p:Int)
   tant que 2p ≤ F.n faire
      p <- 2p
      si p+1 ≤ F.n et F.prio[p+1] < F.prio[p] alors p++ fsi
      si F.prio[p div 2] ≤ F.prio[p] alors exit_tq fsi
      échanger(F.prio[p div 2], F.prio[p])
   fintq

Procédure augmenterPrio (p:Int, c:Tprio)
   si 1 ≤ p ≤ F.n et c > F.prio[p] alors
      F.prio[p] <- c; F.descendre(p)
   fsi
```



# File de priorité et tas binaire

## Implémentation

```
Procédure supprimer (p:Int)
   si 1 ≤ p ≤ F.n alors
      F.prio[p] <- F.prio[F.n]; F.n--
      F.remonter(p); F.descendre(p)
   fsi
```

Pas de méthode efficace (i.e., en $\mathcal{O}(\log n)$) pour la fusion.

## Complexité au pire : récapitulatif

| | |
|---|---|
| $\Theta(1)$ | : estVide, minimum |
| $\Theta(\log n)$ | : insérer, supprimerMin |
| $\Theta(\log n)$ | : diminuerPrio, augmenterPrio, supprimer |
| $\Theta(n)$ | : fusion |



# Tas binaire

## Exercice : Tri par tas (Williams, 1964)

Les opérations doivent se faire en place dans le tableau.

1. Transformer un tableau en tas binaire.
2. Transformer un tas binaire en tableau trié.
3. Étudier la complexité au pire de ces deux opérations.
4. Montrer que la construction du tas peut se faire en $\mathcal{O}(n)$.

# Arbres binomiaux

**Définition : Arbre binomial**

Un arbre binomial est un arbre ordonné défini récursivement :

- $B_0$ est constitué d'un unique noeud.
- $B_k$ est constitué de deux arbres $B_{k-1}$, l'un étant ajouté comme fils le plus à gauche au second.

Dessiner les arbres $B_0$ à $B_4$.

**Lemme : Propriétés combinatoires**

1. L'arbre $B_k$ comporte $2^k$ noeuds.
2. L'arbre $B_k$ est de hauteur $k$.
3. L'arbre $B_k$ comporte $\binom{k}{i}$ noeuds à la profondeur $i$
4. La racine de $B_k$ est de degré $k$ et ses fils de gauche à droite sont $B_{k-1}, B_{k-2}, \ldots, B_1, B_0$.



# Arbres binomiaux

**Implémentation d'un arbre binomial**

Problème : le degré des noeuds n'est pas constant.
Solution : pour les fils d'un noeud, on utilise une liste chaînée.
Chaque noeud est une structure comportant

- la priorité,
- l'information associée,
- le degré du noeud,
- un pointeur vers le premier fils du noeud,
- un pointeur vers le frère (droit) du noeud,
- un pointeur vers le père du noeud.



# Tas binomiaux

**Définition : Tas binomial**

Un tas binomial est un ensemble d'arbres binomiaux vérifiant :

- chaque arbre binomial est un tournoi.
- $\forall k \geq 0$, il existe au plus un arbre binomial de degré $k$ dans le tas binomial

**Remarque :**

Soit $t$ un tas binomial contenant $n$ éléments.
Soit $n = \overline{c_p \cdots c_1 c_0}^2$ l'écriture binaire de $n$.
Alors, $t$ contient un arbre binomial de degré $k$ ssi $c_k = 1$.

**Implémentation d'un tas binomial**

On utilise une liste chaînée d'arbres binomiaux classés par degrés croissants.

Pour le chaînage, on utilise le pointeur "frère" des racines des arbres binomiaux.

F.tête est le pointeur vers le premier arbre binomial de la liste.

On utilise une sentinelle de degré $\infty$ à la fin de la liste des arbres binomiaux.



# File de priorité et tas binomiaux

**Implémentation**

```
fonction estVide () :  booléen
   retourner (F.tête.degré = ∞)

fonction minimum () :  Tprio
   min <- ∞; x <- F.tête
   tant que x.degré ≠ ∞ faire
      si x.prio < min alors min <- x.prio fsi
      x <- x.frère
   ftq
   retourner min
```

Rem : on peut aussi mémoriser et retourner un pointeur vers le noeud contenant la priorité minimale.

Complexité au pire : $\mathcal{O}(\log n)$.

# File de priorité et tas binomiaux

## Implémentation : c'est une addition en binaire

```
procédure FusionTas(x,y,z)
Hyp : x et y tas binomiaux se terminant par un maillon de degré ∞
Spec : retourne un tas binomial z contenant l'union des éléments de x et y
z <- NULL; t <- NULL; r <- NULL      t dernier arbre de z et r la retenue
TQ x.degré < ∞ ou y.degré < ∞ faire
 si r = NULL alors cas parmi
  x.degré < y.degré : a <- x; x <- x.frère; ajouter(z,t,a)
  x.degré > y.degré : a <- y; y <- y.frère; ajouter(z,t,a)
  x.degré = y.degré : a <- x; x <- x.frère;
                      b <- y; y <- y.frère; r <- FusionBin(a,b)
 sinon cas parmi
  r.degré < x.degré, y.degré : ajouter(z,t,r); r <- NULL
  r.degré = x.degré < y.degré : a <- x; x <- x.frère; r <- FusionBin(a,r)
  r.degré = y.degré < x.degré : a <- y; y <- y.frère; r <- FusionBin(a,r)
  r.degré = y.degré = x.degré : ajouter(z,t,r); a <- x; x <- x.frère;
                                b <- y; y <- y.frère; r <- FusionBin(a,b)
 finsi
FTQ
si r ≠ NULL alors ajouter(z,t,r) fsi
ajouter(z,t,x)     pour avoir le maillon de degré ∞ à la fin de z
Libérer(y)
```

# File de priorité et tas binomiaux

## Implémentation

```
fonction FusionBin(a,b) : arbre                                    O(1)
Hyp : a et b sont des arbres binomiaux non NULL de même degré
Spec : retourne l'arbre r fusion de a et b
   a.frère <- NULL; b.frère <- NULL
   si b.prio < a.prio alors échanger(a,b) fsi
   b.père <- a; b.frère <- a.fils; a.fils <- b; a.degré++
   retourner a

Procédure Ajouter(z,t,x)                                           O(1)
Hyp : z est un tas binomial et t un pointeur sur le dernier arbre de z
      x est un arbre binomial avec t.degré < x.degré (si non NULL)
Spec : ajoute l'arbre x à la fin du tas binomial z
   x.frère <- NULL
   si t = NULL alors z <- x sinon t.frere <- x fsi
   t <- x
```



# File de priorité et tas binomiaux

## Complexité

- FusionBin est efficace car les fils sont rangés par degrés décroissants.
- FusionTas est efficace car les arbres sont rangés par degrés croissants.
- Complexité au pire de FusionTas : $\mathcal{O}(\log n)$ où $n$ est le nombre d'éléments du tas résultant.



# File de priorité et tas binomiaux

## Implémentation

```
Procédure insérer(c:Tprio)
   y <- nouveauNoeud();
   y.degré <- 0; y.fils <- NULL; y.père <- NULL; y.prio <- c
   y.frère <- nouveauNoeud(); y.frère.degré <- ∞
   x <- F.tête
   FusionTas(x,y,z)
   F.tête <- z

Procédure supprimerMin()
   Trouver la racine z de priorité minimale dans la liste F.tête
   et supprimer simultanément l'arbre z de la liste F.tête
   Créer la liste y des fils de z dans l'ordre inverse
   et terminer la liste y par un maillon de degré ∞
   x <- F.tête
   FusionTas(x,y,z)
   F.tête <- z
```

Complexité au pire : $\mathcal{O}(\log n)$.

# File de priorité et tas binomiaux

## Implémentation

```
Procédure diminuerPrio(x, c:Tprio)
C'est ici que le pointeur vers le père est utile.
Spec : diminuer la priorité du noeud pointé par x
   si x.prio ≤ c alors retourner finsi
   x.prio <- c
   tant que x.père ≠ NULL et x.prio < x.père.prio faire
      échanger(x.prio, x.père.prio)
      x <- x.père
   ftq

Procédure supprimer(x)
Spec : supprime l'élément pointé par x
   F.diminuerPrio(x, −∞)
   F.supprimerMin()
```

Complexité au pire : $\mathcal{O}(\log n)$.



# File de priorité et complexité

## Complexité au pire : tas binaires

$\Theta(1)$ : estVide, minimum
$\Theta(\log n)$ : diminuerPrio, insérer
$\Theta(\log n)$ : augmenterPrio, supprimerMin, supprimer
$\Theta(n)$ : fusion

## Complexité au pire : tas binomiaux

$\Theta(1)$ : estVide
$\Theta(\log n)$ : minimum, fusion
$\Theta(\log n)$ : insérer, supprimerMin
$\Theta(\log n)$ : diminuerPrio, supprimer

## Coût amorti : tas de Fibonacci

$\Theta(1)$ : estVide
$\Theta(1)$ : insérer, minimum
$\Theta(1)$ : fusion, diminuerPrio
$\Theta(\log n)$ : supprimerMin, supprimer



# Plan


Introduction

Preuve et terminaison

Complexité

Paradigmes

Structures de données (types abstraits)

Dictionnaires et tableaux associatifs

Files de priorité

8 Gestion des partitions (Union-Find)




# Gestion de partitions

## Définition : Type abstrait Partition

- Donnée : une partition $P$ d'un ensemble $\{1, \ldots, N\}$ et un représentant pour chaque classe de $P$.
- Opérations :

| | | |
|---|---|---|
| créer : | Int $\rightarrow$ Partition | constructeur |
| find : | Partition $\times$ Int $\rightarrow$ Int | |
| union : | Partition $\times$ Int $\times$ Int $\rightarrow$ Partition | |
| détruire : | Partition $\rightarrow$ | |

- `Partition(N) P` crée une partition $P$ formée de $N$ singletons.
- `P.find(x)` retourne le représentant de la classe de $x$.
  Les représentants des classes ne sont pas modifiés.
- `P.union(x,y)` fusionne les classes de $x$ et $y$.
  Les représentants des autres classes ne sont pas modifiés.

# Gestion de partitions

**Exemple : Composantes connexes d'un graphe $G = (S, A)$**

On suppose $S = \{1, \ldots, N\}$.

```
Partition(N) P
Pour chaque (x,y) ∈ A faire
   x' <- P.find(x)
   y' <- P.find(y)
   si x' ≠ y' alors P.union(x',y') fsi
Fin pour
```

**Autre application**

Algorithme de Kruskal pour la recherche d'un arbre couvrant minimum dans un graphe.



# Gestion de partitions

**Implémentation : forêt**

Chaque arbre de la forêt contient les éléments d'une classe.
La forêt est représentée par un tableau `père[1..N]` avec `père[x] = x` si `x` racine.

```
procédure créér(N)
   Pour x <- 1 à N faire père[x] <- x fpour
Si N est grand, utiliser l'initialisation virtuelle
fonction find(x)
   Tant que père[x] ≠ x faire x <- père[x] ftq
   retourner x
procédure union(x,y)
Hyp :  x = find(x) et y = find(y)
   si x ≠ y alors père[x] <- y fsi
```

Remarque : une union arbitraire se réalise par `P.union(P.find(x),P.find(y))`

**Proposition : Complexité**

Une suite d'opérations comportant $n-1$ unions et $m$ find (dans un ordre arbitraire) se réalise en temps $\mathcal{O}(n + mn)$.



# Gestion de partitions

**Union pondérée par taille [2]**

`taille[1..N]` mémorise (un majorant de) la taille des arbres de racines `1,...,N`.

```
procédure créér(N)
   Pour x <- 1 à N faire taille[x] <- 1; père[x] <- x fpour
procédure union(x,y)
Hyp :  x = find(x) et y = find(y)
   si x ≠ y alors
      si taille[y] < taille[x] alors échanger(x,y) fsi
      père[x] <- y
      taille[y] <- taille[x] + taille[y]
   fsi
```

**Proposition : Union pondérée par taille**

Une suite d'opérations comportant $n-1$ unions par taille et $m$ find (dans un ordre arbitraire) se réalise en temps $\mathcal{O}(n + m \log_2 n)$.



# Gestion de partitions

**Union pondérée par rang [4]**

`rang[1..N]` mémorise (un majorant de) la hauteur des arbres de racines `1..N`.

```
procédure créér(N)
   Pour x <- 1 à N faire rang[x] <- 0; père[x] <- x fpour
procédure union(x,y)
Hyp :  x = find(x) et y = find(y)
   si x ≠ y alors
      si rang[y] < rang[x] alors échanger(x,y) fsi
      père[x] <- y
      rang[y] <- max(rang[y], 1+rang[x])
   fsi
```

**Exercice : Union pondérée par rang**

Montrer qu'une suite d'opérations comportant $n-1$ unions par rang et $m$ find (dans un ordre arbitraire) se réalise en temps $\mathcal{O}(n + m \log_2 n)$.

# Gestion de partitions

**Compression de chemins**

```
fonction find(x)
   z <- x
   Tant que père[x] ≠ x faire x <- père[x] ftq
   Tant que père[z] ≠ x faire
      y <- père[z]; père[z] <- x; z <- y
   ftq
   retourner x
```

**Proposition : Compression des chemins**

Une suite d'opérations comportant $n-1$ unions simples et $m$ find avec compression (dans un ordre arbitraire) se réalise en temps $\Theta(n + m(1 + \log_{2+m/n} n))$.



# Gestion de partitions

**Définition : Fonction d'Ackermann (variante) et inverse**

La fonction d'Ackermann est définie par

$$\begin{aligned} & A(0,j) = j+1 \\ \forall i > 0 \quad & A(i,0) = A(i-1,1) \\ \forall i,j > 0 \quad & A(i,j) = A(i-1, A(i,j-1)) \,. \end{aligned}$$

En notant $A(i,j) = A_i(j)$ et en changeant les conditions initiale on obtient

$$A_0 : j \mapsto 2j \qquad A_{i+1} : j \mapsto A_i^{(j)}(1) = \underbrace{A_i \circ \cdots \circ A_i}_{j \text{ fois}}(1)$$

En particulier, on a $A_1(j) = 2^j$ et $A_2(j) = \left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}_{j \text{ fois}}$.

De plus, pour $i \geq 1$, on a $A_i(0) = 1$, $A_i(1) = 2$ et $A_i(2) = 4$.

On définit aussi l'inverse $\alpha : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ par

$$\alpha(m,n) = \min\{k \geq 1 \mid A_k(4\lceil m/n \rceil) > \log_2 n\} \,.$$

Remarque : $A_2(4) = 65536$, donc si $m > 0$ et $0 < n < 2^{65536}$ alors $\alpha(m,n) \leq 2$.



# Gestion de partitions

**Théorème : Union par rang + compression des chemins** — Tarjan

Une suite d'opérations comportant $n-1$ unions par rang et $m$ find avec compression (dans un ordre arbitraire) se réalise en temps $\mathcal{O}((n+m)\alpha(m,n))$.

**Théorème : Union par taille + compression des chemins** — Tarjan

Une suite d'opérations comportant $n-1$ unions par taille et $m$ find avec compression (dans un ordre arbitraire) se réalise en temps $\mathcal{O}((n+m)\alpha(m,n))$.

**Corollaire : Le coût amorti est constant en pratique** — $(n < 2^{65536})$

**Preuve : Voir [7, 2, 4]**