

# Chapitre 3

## Méthodes d'analyse des réseaux de Petri

Serge HADDAD , François VERNADAT<sup>1</sup>

### 1. Introduction

L'un des intérêts majeurs des modèles formels est la possibilité de définir sans ambiguïté le comportement d'un système, de développer des algorithmes de vérification des propriétés et de les intégrer dans un outil logiciel.

La règle de franchissement des réseaux de Petri permet d'associer un graphe d'accessibilité (fini ou infini) au réseau. Ce graphe constitue une représentation formelle du comportement du réseau. Aussi dans un premier temps, nous définirons les propriétés générales les plus significatives (telles que la vivacité ou l'existence de blocages) à partir de ce graphe. Lorsque celui-ci est fini, on peut alors le parcourir et vérifier ces propriétés. Les méthodes basées sur la construction et le parcours de tout ou partie de ce graphe sont appelées méthodes comportementales. Ayant l'avantage d'être conceptuellement simples et applicables aussi bien aux propriétés générales qu'aux propriétés spécifiques du système modélisé (étudiées au chapitre 12), elles présentent néanmoins certains inconvénients : elles ne s'appliquent qu'aux réseaux qui engendrent un nombre d'états fini, leur complexité en temps et en espace dépend de la taille du graphe (très supérieure à celle du réseau) et elles nécessitent de fixer le marquage initial.

Dans les paragraphes suivants, nous examinerons des familles de méthodes alternatives qui tirent profit de la structure du réseau soit pour diminuer la

---

<sup>1</sup>LAMSADE, Université Paris Dauphine, Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75775 Paris cedex 16, France, (serge.haddad@lamsade.dauphine.fr)

LAAS-CNRS, 7, Avenue du Colonel Roche F-31077 Toulouse cedex, (francois@laas.fr)

complexité de l'analyse soit pour la rendre applicable à un réseau dont le marquage initial n'est pas fixé. Nous décrivons de manière approfondie trois de ces méthodes dites structurelles.

L'équation de changement d'état indique que la modification d'un marquage par une séquence de franchissement s'exprime comme le produit de la matrice d'incidence par le vecteur des occurrences de transitions dans la séquence. En adaptant les techniques d'algèbre linéaire, on calcule des familles génératrices d'invariants linéaires portant sur les places ou les transitions. Dans le cas des places, ces invariants sont des sommes pondérées de marquages de places invariantes par franchissement. Dans le cas de transitions, il s'agit de vecteurs d'occurrences de transitions de séquences dont le marquage initial et le marquage final sont identiques. Outre l'interprétation directe des invariants, ce calcul a de nombreuses applications dont certaines seront explicitées dans ce livre.

La technique des réductions consiste à substituer à un réseau, un réseau plus petit dont le comportement est équivalent au réseau initial vis à vis d'un ensemble de propriétés significatives. Une réduction est donnée par des conditions structurelles et une méthode de transformation. Cette technique s'applique préalablement à toutes les autres, diminuant par la même leur complexité de calcul.

Puisque le réseau de Petri est un graphe biparti, l'analyse de ce graphe fournit des indications précieuses sur le comportement du réseau. De plus, dans le cadre de modélisations spécifiques (e.g. ateliers flexibles), la structure des réseaux obtenus comporte des régularités en termes de graphe d'où l'on peut déduire des caractérisations structurelles de propriétés comportementales. Nous présenterons brièvement quelques uns de ces modèles, dont celui des réseaux à choix libre pour lesquels de nombreux algorithmes de vérification efficaces ont été proposés.

A travers ce chapitre, nous ne rechercherons pas une description exhaustive des méthodes d'analyse. Par exemple, nous occulterons l'analyse par décomposition du réseau : ces méthodes seront illustrées dans les chapitres consacrés aux réseaux de Petri stochastiques. Nous ne couvrirons pas non plus les méthodes qui exploitent la structure du réseau pour construire des représentations du comportement du réseau plus réduites que le graphe d'accessibilité : elles feront l'objet du deuxième tome. Enfin les méthodes d'analyse des réseaux de Petri non bornés font l'objet du chapitre suivant.

Nous avons choisi de présenter les preuves des propositions chaque fois que leur taille restait raisonnable. Il nous semble que seule une exposition de ces démonstrations éclairera le lecteur sur le fondement d'une méthode. Nous nous sommes limités à des résultats centraux pour ceux qui sont énoncés sans justification : les références devraient permettre au lecteur d'accéder à une théorie plus approfondie dans des ouvrages spécialisés ou des communications de re-

cherche.

### Notations générales

#### 1 Ensembles et Nombres

- $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des entiers relatifs,  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des rationnels et  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des réels.
- Soit  $X$  un ensemble numérique,  $X^+$  désigne le sous-ensemble de  $X$  restreint aux éléments non négatifs.  $Max(X)$  désigne son plus petit majorant (éventuellement  $\infty$ ) et  $Min(X)$  désigne son plus grand mineur (éventuellement  $-\infty$ ).
- Soit  $E$  un ensemble,  $|E|$  désigne son cardinal.

#### 2 Vecteurs et Matrices

- Soit  $E$  un ensemble, un vecteur  $v$  de dimension  $E$  à coefficients entiers naturels est une application de  $E$  dans  $\mathbb{N}$ . Pour  $e \in E$ ,  $v(e)$  désigne la composante en  $e$  du vecteur. L'ensemble de ces vecteurs se note  $\mathbb{N}^E$ . Cette notion se généralise à tout ensemble numérique ( $\mathbb{Z}^E, (\mathbb{Q}^+)^E, \dots$ ). Cette notion s'étend aux matrices. Par exemple, la matrice d'incidence  $C \in \mathbb{Z}^{P \times T}$ .
- Soit  $e \in E$ , le vecteur  $\vec{e}$  de  $\mathbb{N}^E$  est défini par  $\vec{e}(e) = 1$  et  $\vec{e}(e') = 0$  pour  $e' \neq e$ .
- $\vec{0}$  désigne le vecteur nul dont la dimension sera déterminée par le contexte.
- Soit  $(E, <)$  un ensemble totalement ordonné, l'ordre lexicographique (total) sur  $X^E$  (où  $X$  est un ensemble numérique) est défini par :  

$$v < v' \Leftrightarrow \exists e \in E, v(e) < v'(e) \text{ et } \forall e' < e, v(e') = v'(e')$$
- Soit  $A$  une matrice de dimension  $E \times F$ , alors  $A^t$  est la matrice transposée de dimension  $F \times E$  définie par  $A^t(i, j) = A(j, i)$ . Si  $E \cap F = \emptyset$ , on notera pour  $e \in E$  et  $f \in F$ ,  $A(e)$  le vecteur ligne de  $A$  d'indice  $e$  et  $A(f)$  le vecteur colonne de  $A$  d'indice  $f$ . Nous appliquerons cette notation essentiellement aux matrices *Pré*, *Post* et *C*.
- Un vecteur de dimension  $E$  s'interprète comme une matrice de dimension  $E \times \{1\}$ . La transposition s'applique donc aussi aux vecteurs.
- Soit  $v$  un vecteur de dimension  $E$ , on définit le support de  $v$ , noté  $\|v\|$  par :  $\|v\| = \{e \in E \mid v(e) \neq 0\}$ .
- Soient  $v_1, v_2$ , deux vecteurs de même dimension on note  $v_1 \leq v_2$  ssi  $\forall e, v_1(e) \leq v_2(e)$  et  $v_1 < v_2$  ssi ( $v_1 \leq v_2$  et  $v_1 \neq v_2$ ).  $Sup(v_1, v_2)$  désigne le vecteur défini par  $Sup(v_1, v_2)(e) = Max(v_1(e), v_2(e))$

#### 3 Séquences et Langages

- Soit  $\Sigma$  un alphabet (i.e. un ensemble fini),  $\Sigma^*$  désigne l'ensemble des mots finis de  $\Sigma$  et  $\Sigma^\infty$  désigne l'ensemble des mots infinis de  $\Sigma$ .
- Soit  $\sigma \in \Sigma^*$ , soit  $\sigma' \in \Sigma^* \cup \Sigma^\infty$ ,  $\sigma.\sigma'$  désigne la concaténation des deux mots.

- Soit  $\sigma \in \Sigma^*$ ,  $\sigma^\infty$  désigne le mot (infini excepté si  $\sigma$  est le mot vide noté  $\lambda$ ) obtenu par répétition infinie de  $\sigma$ .
- Soit  $\Sigma'$  un sous-alphabet de  $\Sigma$ , soit  $\sigma$  un mot de  $\Sigma$ , la projection de  $\sigma$  sur  $\Sigma'$  notée  $\sigma_{|\Sigma'}$  est définie récursivement par :
 
$$\lambda_{|\Sigma'} = \lambda \text{ et } (\sigma.a)_{|\Sigma'} = \text{Si } a \in \Sigma' \text{ alors } \sigma_{|\Sigma'}.a \text{ sinon } \sigma_{|\Sigma'}$$
- Soit  $\sigma$  un mot, alors  $\tilde{\sigma}$  est le mot inverse défini récursivement par :
 
$$\tilde{\lambda} = \lambda \text{ et } \widetilde{(\sigma.a)} = a.\tilde{\sigma}$$
- On notera  $m[\sigma]_{P'}m'$  une séquence de franchissement lorsqu'on restreint la condition de franchissabilité à un sous-ensemble de places  $P'$ . De même lorsqu'on voudra préciser le réseau  $R$  d'une séquence de franchissement, on notera :  $m[\sigma]_Rm'$ . On combinera aussi les deux notations :  $m[\sigma]_{R,P'}m'$ .

#### 4 Réseaux

- Soit  $s$  un élément de  $P \cup T$  alors  $\bullet s$  désigne l'ensemble des prédécesseurs de  $s$  dans le réseau et  $s^\bullet$  désigne l'ensemble des successeurs de  $s$  dans le réseau. Autrement dit, si  $s$  est une transition alors  $\bullet s = \|\text{Pré}(s)\|$  et  $s^\bullet = \|\text{Post}(s)\|$  et si  $s$  est une place alors  $\bullet s = \|\text{Post}(s)\|$  et  $s^\bullet = \|\text{Pré}(s)\|$ .
- Cette notation s'étend naturellement aux sous-ensembles de noeuds :  $\bullet S = \{t \mid \exists s \in S t \in \bullet s\}$  et  $S^\bullet = \{t \mid \exists s \in S t \in s^\bullet\}$
- Bien qu'il s'agisse d'un abus de langage, un réseau de Petri désignera à la fois la structure  $R$  et le réseau marqué  $(R, m_0)$ . Le contexte permettra à chaque fois de faire la distinction.
- Sur les schémas de réseaux de Petri la double flèche représente les arcs  $\text{Pré}$  et  $\text{Post}$  superposés

Nous supposons connues du lecteur les bases de la théorie des graphes [AHO 74, EVE 79]. Les notions essentielles abordées seront la connexité, la forte connexité, les composantes fortement connexes (initiales, terminales) et les chemins et circuits élémentaires ainsi que les arbres.

Enfin la complexité théorique des méthodes sera discutée en anticipant le chapitre suivant où les notions de base de complexité sont présentées. Le lecteur pourra s'y reporter si nécessaire.

## 2. Analyse comportementale des réseaux de Petri

### 2.1. Sémantiques d'un réseau

La manière la plus simple de définir le comportement d'un réseau est de considérer les marquages accessibles depuis le marquage initial.

**Définition 1 (Ensemble d'accessibilité)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri, l'ensemble d'accessibilité d'un réseau noté  $A(R, m_0)$  est l'ensemble des marquages atteints par une séquence de franchissement :

$$A(R, m_0) = \{m \mid \exists \sigma \in T^* \text{ t.q. } m_0[\sigma]m\}$$

Une manière plus complète consiste à prendre en compte la relation d'accessibilité immédiate entre marquages accessibles à travers le graphe d'accessibilité.

**Définition 2 (Graphe d'accessibilité)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri, le graphe d'accessibilité d'un réseau noté  $G(R, m_0)$  est défini par :

- l'ensemble de noeuds  $A(R, m_0)$
- l'ensemble des arcs : un arc étiqueté  $t$  joint  $m$  à  $m'$  si et seulement si  $m[t]m'$

Si l'observation des événements est plus primordiale que l'état interne du système (représenté par le marquage) alors le langage des séquences de franchissement est plus adéquat. Souvent, plusieurs transitions modélisent le même événement ou une transition modélise une action interne. Il est alors judicieux de passer par le biais d'un étiquetage des transitions.

**Définition 3 (Langage d'un réseau)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri, soit  $\Sigma$  un alphabet et  $l$  une fonction d'étiquetage de  $T$  dans  $\Sigma \cup \lambda$  (le mot vide). La fonction d'étiquetage s'étend aux séquences par  $l(\lambda) = \lambda$  et  $l(\sigma.t) = l(\sigma).l(t)$ . Soit  $Term$  un ensemble fini de marquages terminaux. Le langage du réseau noté  $L(R, m_0, l, Term)$  est défini par :

$$L(R, m_0, l, Term) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists \sigma \in T^*, \exists m_f \in Term, m_0[\sigma]m_f \text{ et } w = l(\sigma)\}$$

D'autres définitions de langages de réseaux de Petri sont possibles. Par exemple, on peut restreindre les possibilités de la fonction d'étiquetage ou ne pas contraindre le marquage final de la séquence.

## 2.2. Propriétés usuelles

### 2.2.1. Définition des propriétés

L'intérêt d'un modèle est la possibilité de définir des propriétés du système modélisé de manière formelle et de vérifier ces propriétés à l'aide d'algorithmes ou d'heuristiques. Dans le cas des réseaux de Petri, les propriétés usuelles qu'on souhaite définir sont celles qui caractérisent l'activité d'un système parallèle.

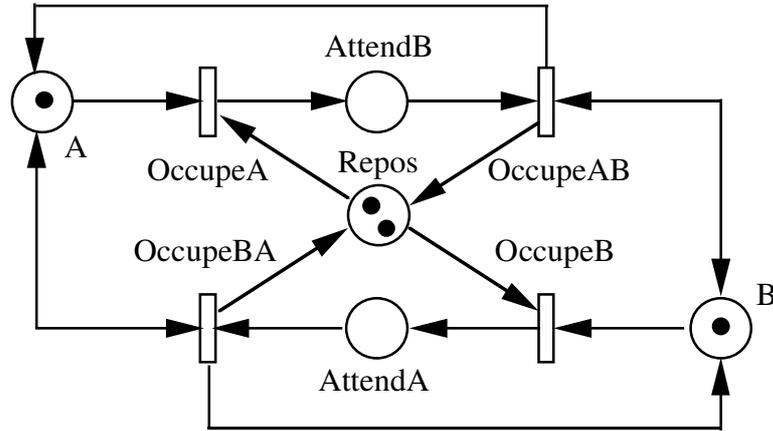


Figure 1: Deux processus partageant deux ressources

Ces propriétés peuvent être spécifiques à un système parallèle ou simplement relatives à un système dynamique.

Nous illustrerons ces propriétés sur le réseau de la figure 1. Ce réseau modélise deux processus banalisés initialement au *Repos*. Chacun de ces processus a le choix d'exécuter l'un des deux procédures suivantes : soit prendre la ressource *A* (modélisé par *OccupeA*), puis la ressource *B* et revenir au repos (*OccupeAB* est une abstraction de ces deux événements) soit prendre les ressources dans l'ordre inverse.

La première propriété d'un tel système est de savoir si son comportement est fini ou non. Autrement dit, si ce système peut parcourir une séquence infinie de franchissement.

**Définition 4 (Existence d'une séquence infinie)**

Un réseau de Petri  $(R, m_0)$  admet une séquence infinie  $\sigma \in T^\infty$  si pour tout  $\sigma'$  préfixe fini de  $\sigma$ ,  $\sigma'$  est une séquence de franchissement de  $(R, m_0)$ .

**Exemple 1**  $(OccupeA.OccupeAB)^\infty$  est une séquence infinie du réseau des deux processus.

Lorsque le réseau ne possède pas de séquence infinie, on dit qu'il vérifie la propriété de *terminaison*.

Un problème dual du précédent est de savoir si le système ne s'arrête jamais. Par exemple, un système d'exploitation ne doit jamais se bloquer quelque soit le comportement des utilisateurs. Autrement dit de tout état atteint, on peut franchir au moins une transition.

**Définition 5 (Pseudo-vivacité)**

Un réseau de Petri  $(R, m_0)$  est pseudo-vivant si :

$$\forall m \in A(R, m_0) \exists t \in T \text{ t.q. } m[t]$$

Dans le cas d'un marquage sans transition franchissable, on parle d'un marquage *mort*.

**Exemple 2** La séquence  $OccupeA.OccupeB$  conduit à un marquage mort.

Une erreur fréquente de modélisation est de concevoir un réseau dans lequel une transition n'est jamais franchissable. Il est alors important d'éliminer ces vices de conception.

**Définition 6 (Quasi-vivacité)**

Un réseau de Petri  $(R, m_0)$  est quasi-vivant si :

$$\forall t \in T \exists m \in A(R, m_0) \text{ t.q. } m[t]$$

**Exemple 3** Du marquage initial, on peut franchir la séquence :

$$OccupeA.OccupeAB.OccupeB.OccupeBA$$

où apparaît chaque transition du réseau.

Les deux propriétés précédentes assurent une certaine correction du système mais elles ne permettent pas d'affirmer que, dans n'importe quel état atteint, le système dispose encore de toutes ses fonctionnalités. Autrement dit, si toute transition peut toujours être ultérieurement franchie à partir d'un état quelconque du système.

**Définition 7 (Vivacité)**

Un réseau de Petri  $(R, m_0)$  est vivant si pour tout marquage  $m \in A(R, m_0)$ , le réseau  $(R, m)$  est quasi-vivant. Autrement dit :

$$\forall m \in A(R, m_0) \forall t \in T \exists m' \in A(R, m) \text{ t.q. } m'[t]$$

**Exemple 4** Du marquage mort  $\overrightarrow{AttendA} + \overrightarrow{AttendB}$ , on ne peut franchir aucune transition. Donc le réseau n'est pas vivant.

Une autre propriété importante est la possibilité de toujours revenir à un état donné, cet état représentant la réinitialisation du système. Lorsqu'il s'agit du marquage initial, la réinitialisation est identique à l'initialisation.

**Définition 8 (Existence d'un état d'accueil)**

Un réseau de Petri  $(R, m_0)$  admet un état d'accueil  $m_a$  si :

$$\forall m \in A(R, m_0), \exists \sigma \in T^* \text{ t.q. } m[\sigma]m_a$$

**Exemple 5** De n'importe quel marquage accessible, le marquage mort est atteignable donc le réseau admet un état d'accueil.

On distingue parfois la modélisation de systèmes ouverts de celles des systèmes fermés. Or modéliser des systèmes ouverts suppose, par exemple, l'arrivée d'un nombre indéterminé de clients, ce qui conduit à la définition suivante.

**Définition 9 (Caractère borné d'un réseau)**

Un réseau de Petri  $(R, m_0)$  est non borné si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in A(R, m_0), \exists p \in P \text{ t.q. } m(p) > n$$

**Exemple 6** Les places contiennent soit des ressources soit des processus donc le réseau est borné.

Si le réseau est non borné, au moins l'une des places peut contenir un nombre aussi grand que possible de jetons. De telles places sont dites *non bornées*. Si le réseau est borné, *une borne du réseau* est un entier supérieur ou égal à tout marquage accessible d'une place quelconque. Comme nous le verrons lors de l'étude de la monotonie, il est souvent intéressant de modifier le marquage initial pour voir son impact sur le comportement. Aussi  $R$  sera dit *structurellement borné* s'il est borné pour n'importe quel marquage initial.

## 2.2.2. Relations entre propriétés

Nous établissons maintenant des relations simples entre les différentes propriétés.

**Proposition 10** Si  $(R, m_0)$  est pseudo-vivant ou non borné, alors  $(R, m_0)$  admet une séquence infinie.

**Preuve**

Si le réseau est pseudo-vivant, on construit la séquence infinie en franchissant itérativement n'importe quelle transition (il en existe toujours au moins une). La deuxième partie de la proposition sera prouvée à l'aide des caractérisations des propriétés par l'existence de séquences particulières.  $\diamond$

**Proposition 11** *Si  $(R, m_0)$  est vivant, alors  $(R, m_0)$  est quasi-vivant et pseudo-vivant.*

**Preuve**

Supposons le réseau vivant,  $m_0 \in A(R, m_0)$  donc par définition  $(R, m_0)$  est quasi-vivant. Soit  $t$  une transition quelconque de  $T$  et  $m \in A(R, m_0)$ , par définition  $(R, m)$  est quasi-vivant, aussi  $\exists \sigma \in T^* m[\sigma.t]$ . Donc  $m$  n'est pas mort. Par conséquent le réseau est pseudo-vivant.  $\diamond$

**Proposition 12** *Si  $(R, m_0)$  est quasi-vivant et admet  $m_0$  pour marquage d'accueil, alors  $(R, m_0)$  est vivant.*

**Preuve**

Pour franchir une transition  $t$  à partir d'un marquage accessible, on retourne en  $m_0$  (état d'accueil) d'où on franchit une séquence terminée par  $t$  (quasi-vivacité).  $\diamond$

### 2.2.3. Monotonie des propriétés

Lors d'une modélisation, on est parfois amené, une fois la structure du réseau de Petri définie, à modifier le marquage initial pour examiner différentes hypothèses. Assez souvent cette modification se traduit par un ajout de marques dans les places. Aussi est-il intéressant de savoir si une propriété est conservée par cet ajout de marques.

**Définition 13** *Soit  $\pi$  une propriété de réseau de Petri,  $\pi$  est dite monotone si et seulement si :*

$$\forall m_0 \leq m'_0, \pi \text{ est satisfaite par } (R, m_0) \Rightarrow \pi \text{ est satisfaite par } (R, m'_0)$$

Le lemme suivant justifie l'étude de la monotonie.

**Lemme 14 (Lemme de monotonie)** *Soit  $R$  un réseau de Petri,*

- $\forall m_1 \leq m'_1 m_1[\sigma]m_2 \Rightarrow m'_1[\sigma]m'_2$  avec  $m_2 \leq m'_2$
- *Si de plus pour une place  $p$ ,  $m_1(p) < m'_1(p)$  alors  $m_2(p) < m'_2(p)$*

**Preuve**

Le résultat se déduit du cas où la séquence  $\sigma$  est réduite à une transition par une récurrence immédiate. Dans le cas d'une transition, il s'agit d'une simple conséquence de la règle de franchissement  $\diamond$

Nous examinons parmi les propriétés définies ci-dessus lesquelles sont monotones.

**Proposition 15** *Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri :*

- $(R, m_0)$  admet une séquence infinie est une propriété monotone.
- $(R, m_0)$  est pseudo-vivant n'est pas une propriété monotone.
- $(R, m_0)$  est quasi-vivant est une propriété monotone.
- $(R, m_0)$  est vivant n'est pas une propriété monotone.
- $(R, m_0)$  admet un état d'accueil n'est pas une propriété monotone.
- $(R, m_0)$  est non borné est une propriété monotone.

Les propriétés qui se caractérisent par l'existence de séquences de franchissement à partir de l'état initial sont monotones. Pour les autres, nous pouvons exhiber des contre-exemples élémentaires.

**Exemple 7** Le réseau de la figure 1 est vivant pour le marquage initial  $\overrightarrow{Repos} + \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$  inférieur au marquage initial originel pour lequel le réseau n'est même pas pseudo-vivant.

#### 2.2.4. Caractérisation des propriétés à l'aide d'un graphe d'accessibilité fini

La manière la plus simple de vérifier les propriétés consiste à examiner le graphe d'accessibilité lorsque celui-ci est fini. Aussi nos premières caractérisations reposent sur ce graphe.

Nous illustrerons ces caractérisations sur le réseau de la figure 1 dont le graphe d'accessibilité est représenté sur la figure 2.

**Proposition 16** *Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri,*

$$(R, m_0) \text{ est borné} \Leftrightarrow A(R, m_0) \text{ est fini.}$$

**Preuve**

Supposons  $(R, m_0)$  borné et soit  $n$  une borne, alors  $A(R, m_0)$  est inclus dans  $\{m \mid m \leq \sum_{p \in P} n \cdot \vec{p}\}$ . Or cet ensemble est fini. Supposons  $A(R, m_0)$  fini, alors  $Max(\{m(p) \mid p \in P \text{ et } m \in A(R, m_0)\})$  est fini et constitue une borne du réseau.  $\diamond$

Dans le reste du paragraphe, on précisera si la caractérisation dépend du fait que  $(R, m_0)$  soit borné.

**Proposition 17** *Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri borné,*

$$(R, m_0) \text{ admet une séquence infinie} \Leftrightarrow G(R, m_0) \text{ admet un circuit.}$$

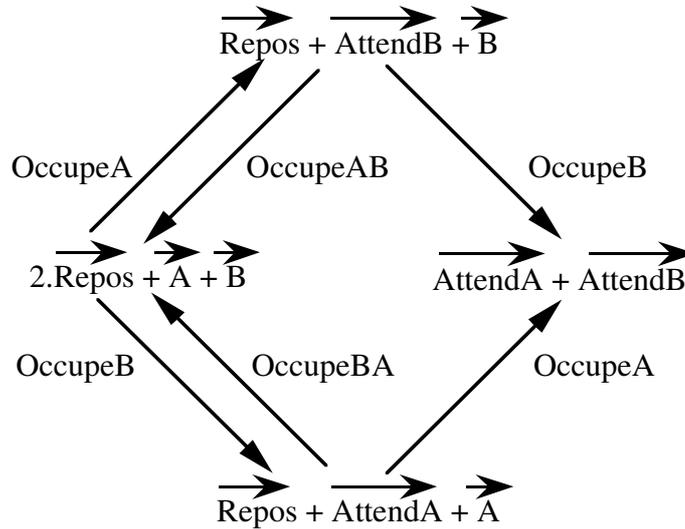


Figure 2: Un graphe d'accessibilité

**Preuve**

Supposons que  $(R, m_0)$  admette une séquence infinie  $\sigma$ , alors cette séquence passe au moins deux fois par un même marquage. D'où  $\sigma = \sigma'.\sigma''$ ,  $\sigma' = u.v$  avec  $m_0[u]m[v]m$ . Donc  $m[v]m$  est un circuit du graphe. Supposons que  $G(R, m_0)$  admette un circuit  $m[v]m$ ,  $m$  est accessible donc il existe  $u$  telle que  $m_0[u]m$ . Par conséquent,  $u.v^\infty$  est une séquence infinie de  $(R, m_0)$ .  $\diamond$

**Exemple 8** Le graphe d'accessibilité de la figure 2 comporte deux circuits élémentaires, donc le réseau de Petri admet une séquence infinie.

**Proposition 18** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri,

$(R, m_0)$  est pseudo-vivant  $\Leftrightarrow$  Tout noeud de  $G(R, m_0)$  admet un successeur.

**Preuve**

$(R, m_0)$  est pseudo-vivant  $\Leftrightarrow$  Tout marquage accessible de  $(R, m_0)$  permet de franchir une transition  $\Leftrightarrow$  Tout noeud de  $G(R, m_0)$  admet un successeur  $\diamond$

**Exemple 9** Le graphe d'accessibilité comporte un noeud sans successeur, donc le réseau de Petri n'est pas pseudo-vivant (et donc pas vivant).

**Proposition 19** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri,

$(R, m_0)$  est quasi-vivant  $\Leftrightarrow$  Toute transition étiquette un arc de  $G(R, m_0)$

**Preuve**

$(R, m_0)$  est quasi-vivant  $\Leftrightarrow$  Toute transition est franchissable depuis un marquage accessible  $\Leftrightarrow$  Toute transition étiquette un arc de  $G(R, m_0)$ .  $\diamond$

**Exemple 10** Toutes les transitions apparaissent sur le graphe d'accessibilité donc le réseau de Petri est quasi-vivant.

Les deux dernières propriétés se caractérisent à l'aide des composantes fortement connexes (c.f.c.) du graphe d'accessibilité.

**Proposition 20** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri borné,

$(R, m_0)$  est vivant  $\Leftrightarrow$  Pour toute c.f.c. terminale  $\mathcal{C}$  de  $G(R, m_0)$ , toute transition étiquette un arc de  $\mathcal{C}$

**Preuve**

Supposons  $(R, m_0)$  vivant et soit  $m$  appartenant à une c.f.c. terminale  $\mathcal{C}$ . On a par définition  $(R, m)$  quasi-vivant donc toute transition étiquette un arc de  $G(R, m)$  qui n'est autre que  $\mathcal{C}$  puisque  $\mathcal{C}$  est terminale.

Pour l'autre implication, soit  $m$  un marquage quelconque. Il existe un chemin de  $m$  à  $m'$  appartenant à une c.f.c.  $\mathcal{C}$  terminale (*propriété des graphes finis*). Puisque  $\mathcal{C}$  est incluse dans  $G(R, m)$  toute transition étiquette un arc de  $G(R, m)$ . Donc  $(R, m)$  est quasi-vivant.  $\diamond$

**Proposition 21** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri borné,

$(R, m_0)$  admet un état d'accueil  $\Leftrightarrow$  Il existe une seule c.f.c. terminale de  $G(R, m_0)$

**Preuve**

Soit  $m$  un marquage d'accueil de  $(R, m_0)$  et  $\mathcal{C}$  sa c.f.c. Alors il existe un chemin de tout  $m'$  à  $m$ . Soit  $\mathcal{C}'$  la c.f.c. de  $m'$ . Si  $\mathcal{C}'$  est différente de  $\mathcal{C}$ , alors  $\mathcal{C}'$  n'est pas terminale. D'autre part,  $\mathcal{C}$  est terminale puisqu'on peut toujours revenir à  $m$ .

Soit  $\mathcal{C}$  la seule c.f.c. terminale de  $G(R, m_0)$ . Pour tout  $m' \in A(R, m_0)$ , il existe un chemin de  $m'$  à  $\mathcal{C}$ . Donc tout marquage de  $\mathcal{C}$  est un marquage d'accueil.  $\diamond$

**Exemple 11** Il y a deux c.f.c. dans le graphe d'accessibilité dont l'une est initiale (contenant le marquage initial) et l'autre terminale réduite au marquage mort. Ce marquage est donc un état d'accueil.

2.2.5. *Caractérisation des propriétés à l'aide de séquences finies particulières*

Pour au moins deux raisons, on souhaite obtenir des caractérisations ne reposant pas sur le graphe d'accessibilité. D'une part, ces caractérisations ne sont exploitables que si le graphe est fini et d'autre part même dans ce cas la taille du graphe peut rendre impossible ou impraticable la vérification. Dans ce paragraphe, nous tirons profit de quelques lemmes généraux que nous rappelons maintenant.

**Lemme 22 (Lemme de Koenig)** *Soit  $A$  un arbre de degré fini (i.e. tout noeud admet un nombre fini de successeurs) et comportant un nombre de noeuds infini; alors  $A$  admet une branche infinie.*

**Preuve**

Nous exhibons la branche infinie de la manière suivante. Partant de la racine, on choisit l'un des successeurs de celle-ci dont le sous-arbre a un nombre infini de noeuds. Il en existe au moins un car le nombre de successeurs est fini. En itérant ce procédé au niveau de chaque nouveau sous-arbre choisi, on construit la branche infinie.  $\diamond$

**Lemme 23 (Lemme d'extraction)** *Soit  $m_0, m_1, \dots$  une suite infinie de vecteurs de  $\mathbb{N}^{\{1, \dots, k\}}$ , alors cette suite admet une sous-suite croissante.*

**Preuve**

Ceci se prouve par récurrence sur  $k$ . Si  $k = 1$ , on a affaire à une suite d'entiers naturels, aussi on choisit comme premier indice de la sous-suite l'indice d'un des éléments minimaux de la suite. Puis on itère le procédé à partir de la suite tronquée partant de cet élément. Supposons le résultat acquis pour  $k - 1$ ; à partir d'une suite de  $\mathbb{N}^{\{1, \dots, k\}}$ , on extrait une sous-suite croissante sur les  $k - 1$  premières composantes. En appliquant le procédé utilisé pour  $k = 1$  à la dernière composante de la sous-suite intermédiaire, on obtient la sous-suite désirée.  $\diamond$

Nous appliquons immédiatement ces lemmes pour caractériser deux de nos propriétés.

**Proposition 24**  *$(R, m_0)$  admet une séquence infinie  $\Leftrightarrow (R, m_0)$  admet une séquence de franchissement  $m_0[\sigma_1]m_1[\sigma_2]m_2$  avec  $m_1 \leq m_2$ .*

**Preuve**

Supposons d'abord que le réseau admette une séquence infinie et considérons la suite infinie des marquages rencontrés. D'après le lemme 23, on peut en extraire une sous-suite croissante. Appelons  $m_1$  et  $m_2$  les deux premiers éléments de cette suite, alors la séquence finie qui atteint  $m_2$  est de la forme désirée.

Pour l'autre implication, puisque  $m_1 \leq m_2$ , en appliquant le lemme de monotonie  $\sigma_2$  peut être franchie à partir de  $m_2$  pour obtenir un marquage  $m_3 \geq m_2$ . En itérant ce procédé, on obtient la séquence infinie  $\sigma_1.\sigma_2^\infty$ .  $\diamond$

**Proposition 25**  $(R, m_0)$  est non borné  $\Leftrightarrow (R, m_0)$  admet une séquence de franchissement  $m_0[\sigma_1]m_1[\sigma_2]m_2$  avec  $m_1 < m_2$ .

### Preuve

Supposons d'abord que le réseau soit non borné et considérons un arbre infini construit en partant du marquage initial et tel qu'on ajoute un fils à un marquage si de ce marquage, on peut franchir une transition conduisant à un marquage non présent dans l'arbre. Il peut y avoir plusieurs arbres possibles, mais tous ont exactement comme ensemble de noeuds l'ensemble des marquages accessibles. Cet arbre a un degré fini puisque  $T$  est fini donc d'après le lemme 22, il contient une branche infinie correspondant à une séquence de franchissement infinie. D'après le lemme 23, on peut en extraire une sous-suite croissante. Appelons  $m_1$  et  $m_2$  les deux premiers éléments de cette suite; alors la séquence finie qui atteint  $m_2$  est de la forme désirée car nécessairement  $m_2 > m_1$  puisque tous les marquages sont différents dans l'arbre.

Pour l'autre implication, on remarque que puisque  $m_1 \leq m_2$ ,  $\sigma_2$  peut être franchie à partir de  $m_2$  pour obtenir un marquage  $m_3 \geq m_2$ . En itérant ce procédé, on obtient la séquence infinie  $\sigma_1.\sigma_2^\infty$ . D'autre part, soit  $p$  une place telle que  $m_1(p) < m_2(p)$  alors  $m_2(p) < m_3(p)$ . Par conséquent la séquence accroît indéfiniment le nombre de marques dans  $p$ .  $\diamond$

Ces deux caractérisations établissent trivialement la preuve de la seconde partie de la proposition 10. Nous en profitons pour introduire des types de séquences qu'on retrouve dans l'analyse des réseaux.

**Définition 26 (Séquences répétitives)** Soit  $R$  un réseau de Petri,  $\sigma$  une séquence de transitions et soit  $m$  un marquage rendant franchissable  $\sigma$  ( $m[\sigma]m'$ ); alors :

- Si  $m \leq m'$ ,  $\sigma$  est dite répétitive
- Si  $m = m'$ ,  $\sigma$  est dite répétitive stationnaire
- Si  $m < m'$ ,  $\sigma$  est dite répétitive croissante

## 3. Analyse des réseaux par les invariants linéaires

### 3.1. Définitions et premières applications

L'équation de changement d'état que nous énonçons ci-dessous s'interprète ainsi : l'effet d'une séquence de franchissement est entièrement déterminé par la

matrice d'incidence et le vecteur des occurrences de transitions dans la séquence.

**Définition 27** Soit  $\sigma \in T^*$  une séquence de transitions, son vecteur d'occurrences  $\vec{\sigma} \in \mathbb{N}^T$  est défini par :  $\vec{\sigma}(t)$  est le nombre d'occurrences de  $t$  dans  $\sigma$ .

**Proposition 28 (Equation de changement d'état)** Soit  $R$  un réseau de Petri et soit  $m[\sigma)m'$  une séquence de franchissement alors :

$$m' = m + C \cdot \vec{\sigma}$$

### Preuve

On raisonne par récurrence sur la longueur de la séquence. Pour une séquence vide, le résultat est immédiat. Le pas de la récurrence s'obtient par la définition du franchissement d'une transition.  $\diamond$

Nous cherchons à mettre en évidence des quantités invariantes à l'aide de cette équation. Il nous faut donc annuler la matrice  $C$ .

**Définition 29 (Flots d'un réseau)** Les différents annulateurs que nous considérons sont :

- Un  $P$ -flot est un vecteur non nul  $v$  de  $\mathbb{Z}^P$  qui vérifie  $v^t \cdot C = \vec{0}$
- Un  $P$ -semiflot est un vecteur non nul  $v$  de  $\mathbb{N}^P$  qui vérifie  $v^t \cdot C = \vec{0}$
- Un  $T$ -flot est un vecteur non nul  $v$  de  $\mathbb{Z}^T$  qui vérifie  $C \cdot v = \vec{0}$
- Un  $T$ -semiflot est un vecteur non nul  $v$  de  $\mathbb{N}^T$  qui vérifie  $C \cdot v = \vec{0}$

Un  $P$ -flot (resp. un  $P$ -semiflot) est une somme pondérée de places à coefficients entiers (resp. naturels). Un  $P$ -flot peut donc servir à obtenir une valeur entière à partir d'un marquage quelconque en pondérant les marquages de chaque place et en les sommant. Un  $T$ -semiflot peut s'interpréter comme le vecteur d'occurrences d'une séquence de transitions tandis qu'un  $T$ -flot peut s'interpréter comme la différence de deux vecteurs d'occurrences. Ceci nous conduit aux premiers résultats.

**Proposition 30** Soit  $R$  un réseau de Petri et

- soit  $v$  un  $P$ -flot et  $m[\sigma)m'$  une séquence de franchissement ; alors :

$$v^t \cdot m = v^t \cdot m'$$

- soit  $v$  un  $T$ -semiflot et  $\sigma$  une séquence de transitions telle que  $\vec{\sigma} = v$  ; alors :

$$m[\sigma)m' \Rightarrow m = m'$$

autrement dit,  $\sigma$  est une séquence répétitive stationnaire

- soit  $v$  un  $T$ -flot et  $\sigma_1, \sigma_2$  deux séquences de transitions telles que  $\vec{\sigma}_1 - \vec{\sigma}_2 = v$  ; alors :

$$m[\sigma_1]m' \text{ et } m[\sigma_2]m'' \Rightarrow m' = m''$$

### Preuve

Ces assertions se déduisent très facilement de l'équation de changement d'état. Pour le premier point par exemple, on prémultiplie l'équation par le  $P$ -flot :  $v^t.m' = v^t.m + v^t.C.\vec{\sigma} = v^t.m$   $\diamond$

Etant donné un réseau marqué  $(R, m_0)$ , on parle d'invariant linéaire pour désigner l'équation :

$$\forall m \in A(R, m_0), v^t.m = v^t.m_0$$

où  $v$  est un  $P$ -flot. Dans le cas d'un  $P$ -semiflot, on parle d'un invariant positif. Les invariants positifs possèdent de nombreuses applications. Par exemple, toutes les places du support d'un  $P$ -flot  $v$  sont bornées et ceci quelque soit le marquage initial, puisque  $m(p) \leq v(p)^{-1}.v^t.m_0$ . De même à partir d'un invariant  $m(p) + m(q) + \dots = 1$ , on déduit aisément que  $p$  et  $q$  ne peuvent être simultanément marquées.

Plus généralement, les invariants sont à l'origine de nombreuses conditions nécessaires et/ou suffisantes de propriétés comportementales. Afin de mettre en avant cette caractéristique, nous introduisons deux propriétés structurelles d'un réseau de Petri.

**Définition 31 (Réseaux conservatifs, réseaux consistants)** Soit  $R$  un réseau de Petri,

- $R$  est conservatif s'il existe un  $P$ -semiflot  $v$  tel que  $\|v\| = P$
- $R$  est consistant s'il existe un  $T$ -semiflot  $v$  tel que  $\|v\| = T$

Nous illustrerons cette section à l'aide du réseau présenté sur la figure 3. Deux processus permanents ( $A$  et  $B$ ) exécutent l'une des deux procédures locales ( $H$  ou  $V$ ) puis se synchronisent pour échanger leurs résultats et ceci indéfiniment. La synchronisation n'est possible que si les deux processus ont choisi la même procédure. Il n'est pas difficile de constater que ce réseau est borné (exactement deux jetons dans tout marquage accessible) et non vivant car des choix différents sont possibles. Nous allons par la suite examiner les informations fournies par les invariants linéaires.

Nous rappelons maintenant un lemme extrêmement utile pour l'analyse des réseaux à l'aide de l'algèbre linéaire. Nous différons sa preuve jusqu'au calcul des semiflots.

**Lemme 32 (Lemme de dualité)** Cette dualité se présente sous (au moins) deux formes :

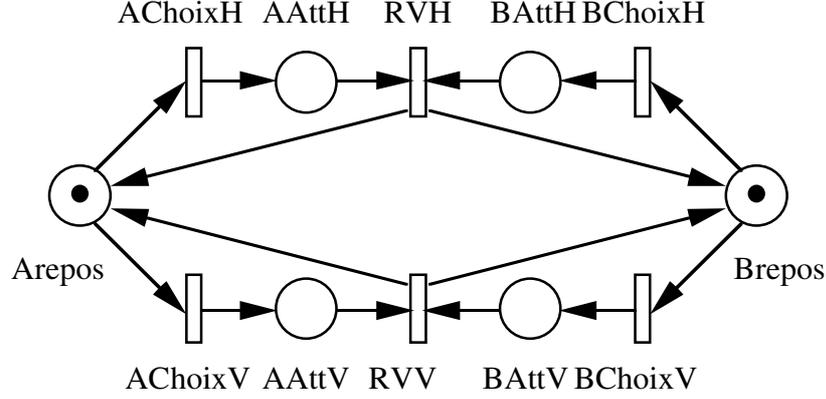


Figure 3: Synchronisation indéterministe de processus

1.  $\nexists v \in \mathbb{N}^P \ \|v\| = P \text{ et } v^t.C = \vec{0} \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{Z}^T \ t.q. \ C.w > \vec{0}$
2.  $\nexists v \in \mathbb{N}^P \ \|v\| = P \text{ et } v^t.C \leq \vec{0} \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{N}^T \ t.q. \ C.w > \vec{0}$

La proposition suivante met en avant les liens qui unissent les propriétés comportementales (vivacité et caractère borné) aux propriétés structurelles (conservation et consistance).

**Proposition 33** *Soit  $R$  un réseau de Petri,*

- $\exists v \in \mathbb{N}^P \ \|v\| = P \text{ et } v^t.C \leq \vec{0} \Leftrightarrow R$  structurellement borné
- En particulier,  $R$  conservatif  $\Rightarrow R$  structurellement borné
- $(R, m_0)$  borné et vivant  $\Rightarrow R$  consistant

Le réseau de la figure 3 illustre le caractère non suffisant de la seconde implication. Il est conservatif (voir le calcul d'invariants plus loin) et consistant (séquence  $ACH.BCH.RVH.AC.V.AC.V.RCV$ ) mais n'est pas vivant (et ceci quelque soit le marquage initial comme nous le verrons plus tard).

### Preuve

Si  $v$  vérifie l'hypothèse de la première assertion, alors  $\forall m \in A(R, m_0), v^t.m \leq v^t.m_0$  et par conséquent pour toute place  $p, m(p) \leq v(p)^{-1}.v^t.m_0$ .  $R$  est structurellement borné.

S'il n'existe pas de  $v$  vérifiant cette hypothèse, alors ceci est équivalent à  $\exists w \in \mathbb{N}^T \ t.q. \ C.w > \vec{0}$  (lemme 32).  $w$  est donc le support d'une séquence  $\sigma$  répétitive croissante. Soit  $m_0$  un marquage tel que  $m_0[\sigma]$ ; alors  $(R, m_0)$  n'est pas borné donc  $R$  n'est pas structurellement borné.

Soit  $(R, m_0)$  un réseau vivant. On construit une séquence infinie de la façon suivante : on franchit une séquence se terminant par la première transition

(vivacité) puis on fait de même successivement avec toutes les transitions et on recommence en partant de la première transition. Soit la suite des marquages obtenus après chaque itération. D'après le lemme 23, on peut extraire deux marquages de cette suite tels que le second soit supérieur ou égal au premier. On a donc  $m_0[\sigma_0)m_1[\sigma_1)m_2$  avec  $m_1 \leq m_2$  et  $\|\vec{\sigma}_1\| = T$ . Si  $m_1 \neq m_2$ , le réseau est non borné d'après la proposition 25. En conséquence  $m_1 = m_2$ ,  $\sigma_1$  est une séquence répétitive stationnaire et  $\vec{\sigma}_1$  est un  $T$ -semiflot ce qui établit la consistance.  $\diamond$

Notons que le test de la deuxième assertion énoncée dans le lemme de dualité est un problème  $\mathcal{NP}$ -complet [JAN 86]. Le caractère non structurellement borné d'un réseau est donc aussi un problème  $\mathcal{NP}$ -complet.

### 3.2. Calcul de flots

Nous ne présentons l'algorithme de calcul que pour les  $P$ -flots car il suffit de l'appliquer à la matrice d'incidence transposée pour obtenir les  $T$ -flots. Observons d'abord que si le réseau possède un flot, alors il en possède une infinité (en multipliant le flot par un scalaire quelconque). Nous allons donc nous limiter au calcul d'une famille génératrice de flots.

**Définition 34** Soit  $R$  un réseau de Petri,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une famille de flots; cette famille est génératrice si :

$$\forall v \text{ flot } \exists \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{Q}^n \text{ t.q. } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i.v_i$$

C'est une plus petite famille génératrice si elle est minimale en nombre d'éléments parmi les familles génératrices.

Comme nous nous sommes placés dans  $\mathbb{Q}$  pour les coefficients, nous sommes en fait à la recherche d'une base du sous-espace vectoriel des annulateurs gauches de  $C$ . Aussi nous pouvons calculer cette famille par l'une des variantes de l'élimination de Gauss.

#### ELIMINATION DE GAUSS

L'algorithme procède transition par transition : il part d'une famille génératrice de flots pour la matrice restreinte aux  $k$  premières transitions et construit une famille génératrice pour la matrice restreinte aux  $k + 1$  premières transitions.

Initialement ( $k = 0$ ) ; il n'y a pas de conditions et la famille génératrice est définie par  $\{\vec{p}\}_{p \in P}$ .

Soit  $t$  la prochaine transition à examiner et  $\{v_1, \dots, v_n\}$  la famille courante.

**Cas n ° 1**  $\forall v_i v_i^t.C(t) = 0$

Dans ce cas, la famille de flots est inchangée.

**Cas n ° 2**  $\exists v_{i0} v_{i0}^t.C(t) \neq 0$

Dans ce cas le flot  $v_{i0}$  va nous servir de *pivot* pour constituer la nouvelle famille génératrice  $\{v'_i\}_{i \neq i0}$  avec :

$$v'_i = (v_{i0}^t.C(t)).v_i - (v_i^t.C(t)).v_{i0}$$

Ainsi à chaque élimination de transition, soit la famille génératrice est conservée, soit son cardinal est décrementé d'une unité. Dans la pratique, la matrice  $C$  est à chaque itération transformée pour représenter la matrice des incidences de la famille de flots courante sur les transitions restant à examiner. Le nombre d'opérations arithmétiques est polynomial puisqu'il y a  $|T|$  éliminations et qu'à chaque élimination le nombre d'opérations est au plus égal  $3.|P|. (|P| + |T|)$ . Néanmoins les coefficients des flots peuvent croître de manière importante tout au moins théoriquement. Il y a donc intérêt à diviser les coefficients d'un nouveau flot par leur p.p.c.m. à chaque étape du calcul. On peut garantir que la taille mémoire des coefficients reste polynômiale en appliquant une méthode plus élaborée qui introduit dans le calcul les vecteurs ligne progressivement (un nouveau vecteur à chaque étape).

**Exemple 12** Nous appliquons l'élimination de Gauss à la matrice d'incidence du réseau de la figure 3. Les noms des places et des transitions ont été abrégés en ne conservant que les majuscules.

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{ACH} & \text{BCH} & \text{ACV} & \text{BCV} & \text{RVH} & \text{RVV} \end{matrix} \\ \left( \begin{array}{cccccc} -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \vec{A} \\ \overrightarrow{AAH} \\ \overrightarrow{AAV} \\ \vec{B} \\ \overrightarrow{BAH} \\ \overrightarrow{BAV} \end{array} \end{array}$$

Sur la première colonne, deux composantes sont non nulles : celles de  $\vec{A}$  et  $\overrightarrow{AAH}$ . Nous choisissons  $\vec{A}$  comme pivot. Cette ligne est supprimée et la ligne indiquée par  $\overrightarrow{AAH}$  est combinée avec la ligne du pivot pour donner une nouvelle ligne. Les autres lignes sont inchangées. La deuxième colonne se traite de manière similaire avec les vecteurs lignes indicés par  $\vec{B}$  et  $\overrightarrow{BAH}$ . Nous obtenons la matrice réduite ci-dessous. Notons que la famille courante indice les vecteurs lignes de cette matrice (vecteurs indiqués à droite).

$$\begin{array}{cccc}
\text{ACV} & \text{BCV} & \text{RVH} & \text{RVV} \\
\left( \begin{array}{cccc}
-1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1
\end{array} \right) & & & \begin{array}{l}
\vec{A} + \overline{AAH} \\
\overline{AAV} \\
\vec{B} + \overline{BAH} \\
\overline{BAV}
\end{array}
\end{array}$$

Nous procédons à présent à l'élimination de la troisième et quatrième colonnes. Pour la troisième colonne, seules deux composantes sont non nulles : celles de  $\vec{A} + \overline{AAH}$  et  $\overline{AAV}$ . On combine à nouveau les deux vecteurs lignes. Le traitement de la quatrième colonne est similaire et conduit à la matrice réduite indiquée ci-dessous.

$$\begin{array}{cc}
\text{RVH} & \text{RVV} \\
\left( \begin{array}{cc}
0 & 0 \\
0 & 0
\end{array} \right) & \begin{array}{l}
\vec{A} + \overline{AAH} + \overline{AAV} \\
\vec{B} + \overline{BAH} + \overline{BAV}
\end{array}
\end{array}$$

Cette matrice est nulle. La famille courante est donc la famille recherchée. Les deux invariants associés traduisent l'état des processus  $A$  et  $B$ .

### 3.3. Calcul de semiflots

Nous définissons ici aussi la notion de plus petite famille génératrice de semiflots et cette fois-ci nous choisissons de prendre des rationnels positifs pour les coefficients.

**Définition 35** Soit  $R$  un réseau de Petri,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une famille de semiflots, cette famille est génératrice si :

$$\forall v \text{ semiflot } \exists \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in (\mathbb{Q}^+)^n \text{ t.q. } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$$

C'est une plus petite famille génératrice si elle est minimale en nombre d'éléments parmi les familles génératrices.

#### ALGORITHME DE FARKAS

Pour calculer cette famille génératrice, nous souhaitons également procéder par élimination de transitions. La famille initiale est la même que pour le calcul des flots. Examinons la manière de former la nouvelle famille génératrice lors de l'élimination d'une transition  $t$ . Nous classons en trois catégories les semiflots de la famille courante :

- $F^+ = \{v/v^t.C(t) > 0\}$
- $F^- = \{v/v^t.C(t) < 0\}$
- $F^0 = \{v/v^t.C(t) = 0\}$

Tout vecteur de  $F^0$  appartient à la nouvelle famille génératrice. Pour obtenir de nouveaux semiflots, il faut annuler l'incidence vis à vis de  $t$  par des combinaisons positives. Il est clair que toute combinaison doit contenir au moins un vecteur de  $F^+$  et un vecteur de  $F^-$ . Il suffit alors de prendre toutes les paires possibles pour former la nouvelle famille  $F'$  :

$$F' = F^0 \cup \{w/\exists v_+ \in F^+, \exists v_- \in F^- w = (v_+^t.C(t)).v_- - (v_-^t.C(t)).v_+\}$$

Nous admettons que la minimalité de la famille s'obtient en ne conservant qu'un semiflot par support minimal [COL 91]. Il y a ici tout intérêt à minimaliser à chaque étape du calcul car l'explosion combinatoire du nombre de semiflots est très importante. Dans le pire des cas, la famille génératrice comporte un nombre de vecteurs exponentiel par rapport au nombre de places.

Nous renvoyons à la même référence pour une discussion approfondie d'une implantation efficace de cet algorithme dit de Farkas.

**Exemple 13** Nous appliquons l'algorithme de Farkas à la matrice d'incidence du réseau de la figure 3. Pour illustrer les différentes étapes du calcul, nous avons modifié l'ordre des colonnes.

$$\begin{array}{cccccc}
 & RVH & ACH & BCH & ACV & BCV & RVV \\
 \mathbf{C} & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \vec{A} \\ \overrightarrow{AAH} \\ \overrightarrow{AAV} \\ \vec{B} \\ \overrightarrow{BAH} \\ \overrightarrow{BAV} \end{array}
 \end{array}$$

Le vecteur colonne indicé par  $RVH$  a deux composantes positives et deux composantes négatives. Nous combinons les vecteurs lignes correspondants, deux à deux, pour annuler leur composante en  $RVH$ . Les deux autres vecteurs lignes sont inchangés. Nous obtenons ainsi la matrice réduite indiquée ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccc}
ACH & BCH & ACV & BCV & RVV \\
\left( \begin{array}{ccccc}
0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1
\end{array} \right) & \begin{array}{l}
\vec{A} + \overline{AAH} \\
\vec{A} + \overline{BAH} \\
\overline{AAV} \\
\vec{B} + \overline{AAH} \\
\vec{B} + \overline{BAH} \\
\overline{BAV}
\end{array}
\end{array}$$

La colonne indiquée par  $ACH$  comporte une composante négative et une composante positive. En combinant les vecteurs correspondants, nous obtenons le vecteur :  $\vec{A} + \overline{BAH} + \vec{B} + \overline{AAH}$ . Le support de ce vecteur n'est pas minimal. Par exemple, il contient strictement le support de  $\vec{A} + \overline{AAH}$ . Ce nouveau vecteur n'est donc pas conservé. La suite de l'algorithme se déroule (**dans ce cas particulier**) comme l'élimination de Gauss et la famille de flots obtenue est identique à la famille de semi-flots.

A l'aide des structures de l'algorithme de Farkas, nous établissons maintenant le lemme de dualité 32.

### Preuve

Comme nous avons affaire à des équations homogènes, nous pouvons remplacer dans nos assertions  $\mathbb{N}$  par  $\mathbb{Q}^+$  et  $\mathbb{Z}$  par  $\mathbb{Q}$ . Il suffit en effet de multiplier une solution rationnelle par un entier approprié pour obtenir une solution entière. Nous commençons par la première équivalence.

Soit  $v \in (\mathbb{Q}^+)^P$  vérifiant  $\|v\| = P$  et  $v^t \cdot C = \vec{0}$  et  $w \in \mathbb{Q}^T$  vérifiant  $C \cdot w > \vec{0}$ .  
Calculons de deux façons possibles  $v^t \cdot C \cdot w$ .

$v^t \cdot C \cdot w = v^t \cdot (C \cdot w) > 0$  car le support de  $v$  est  $P$  et

$v^t \cdot C \cdot w = (v^t \cdot C) \cdot w = 0$  d'où une contradiction.

Supposons maintenant que :  $\nexists v \in (\mathbb{Q}^+)^P$   $\|v\| = P$  vérifiant  $v^t \cdot C = \vec{0}$ .  
Nous allons montrer par récurrence sur  $|T|$  que :  $\exists w \in \mathbb{Q}^T$  vérifiant  $C \cdot w > \vec{0}$ .

. Pour  $T = \{t\}$ ,

- $\exists p_1 \in P$  tel que  $C(p_1, t) \neq 0$  sinon  $v = \sum_{p \in P} \vec{p}$  contredit l'hypothèse.
- Supposons qu'il existe  $p_1 \in P$  tel que  $C(p_1, t) > 0$  et qu'il existe  $p_2 \in P$  tel que  $C(p_2, t) < 0$ . Soit  $x > 0$  et  $v_x = x \cdot \vec{p}_1 + (1/x) \cdot \vec{p}_2 + \sum_{p \neq p_1, p_2} \vec{p}$ . Pour  $x$  suffisamment grand  $v_x^t \cdot C(t) > 0$  et  $x$  suffisamment petit  $v_x^t \cdot C(t) < 0$ . Il existe donc  $x$  tel que  $v_x^t \cdot C(t) = 0$  d'où une contradiction.
- Donc soit  $C(t) > \vec{0}$  et  $w = \vec{t}$  convient, soit  $C(t) < \vec{0}$  et  $w = -\vec{t}$  convient.

Supposons l'existence d'un  $w$  assurée pour  $|T| = n$  et démontrons-la pour  $|T| = n + 1$ . Fixons  $t$  une transition sur laquelle nous pratiquons l'élimination de Farkas.

- Si  $C(t) = \vec{0}$  alors l'hypothèse de récurrence s'applique directement.
- Si  $C(t) > \vec{0}$  alors  $w = \vec{t}$  convient.
- Si  $C(t) < \vec{0}$  alors  $w = -\vec{t}$  convient.

Il nous reste à examiner le cas où  $P^+ = \{p/C(p, t) > 0\}$  et  $P^- = \{p/C(p, t) < 0\}$  ne sont pas vides. Posons  $D$  la matrice de dimension  $F \times P$  composée des vecteurs (lignes) de  $F$ .  $\nexists z \in (\mathbb{Q}^+)^F$   $\|z\| = F$  vérifiant  $z^t \cdot D.C \leq \vec{0}$  car sinon  $v = D^t \cdot z$  vérifie  $v.C \leq \vec{0}$  et le support de  $v$  est  $P$  puisque toute place apparaît dans au moins un vecteur de  $F$ . La matrice  $D.C$  peut être vue comme une matrice  $F \times T \setminus \{t\}$  car par construction  $D.C(t) = \vec{0}$ . L'hypothèse de récurrence s'applique et il existe  $w' \in \mathbb{Z}^{T \setminus \{t\}}$  tel que  $D.C.w' > \vec{0}$ .

Nous allons compléter  $w'$  par une composante en  $t$ . En traduisant l'inéquation vectorielle pour un vecteur de  $F$  obtenu par combinaison linéaire d'un  $\vec{p}^+$  ( $p^+ \in P^+$ ) et d'un  $\vec{p}^-$  ( $p^- \in P^-$ ), on obtient :

$$C(p^+, t) \cdot \sum_{t' \neq t} C(p^-, t') \cdot w'(t') - C(p^-, t) \cdot \sum_{t' \neq t} C(p^+, t') \cdot w'(t') \geq 0$$

Ou encore :

$$\frac{\sum_{t' \neq t} C(p^-, t') \cdot w'(t')}{C(p^-, t)} \leq \frac{\sum_{t' \neq t} C(p^+, t') \cdot w'(t')}{C(p^+, t)}$$

D'où :

$$\max_{p^- \in P^-} \left( \frac{\sum_{t' \neq t} C(p^-, t') \cdot w'(t')}{C(p^-, t)} \right) \leq \min_{p^+ \in P^+} \left( \frac{\sum_{t' \neq t} C(p^+, t') \cdot w'(t')}{C(p^+, t)} \right)$$

Nous choisissons pour  $w'(t)$  n'importe quel rationnel compris entre ce maximum et ce minimum et par construction,  $C.w' > \vec{0}$  (l'inégalité stricte s'obtient en examinant l'élément de  $F$  qui conduit à l'inégalité stricte  $D.C.w' > \vec{0}$ ).

Nous allons établir la deuxième équivalence en utilisant la première. Soit  $v \in (\mathbb{Q}^+)^P$  vérifiant  $\|v\| = P$  et  $v^t \cdot C \leq \vec{0}$  et  $w \in (\mathbb{Q}^+)^T$  vérifiant  $C.w > \vec{0}$ . Calculons de deux façons possibles  $v^t \cdot C.w$ .

$v^t \cdot C.w = v^t \cdot (C.w) > 0$  car le support de  $v$  est  $P$  et

$v^t \cdot C.w = (v^t \cdot C).w \leq 0$  d'où une contradiction.

Soit  $T' \subset T$ , la matrice  $C_{T'} \in \mathbb{Z}^{(P \cup T') \times T'}$  est définie par :  $C'(p, t) = C(p, t)$  et si  $t' = t$  alors  $C(t', t) = 1$  sinon  $C(t', t) = 0$

Supposons maintenant que  $\nexists v \in (\mathbb{Q}^+)^P$   $\|v\| = P$  vérifiant  $v^t \cdot C \leq \vec{0}$ .

Alors par construction de  $C_T$ ,  
 $\nexists v \in (\mathbb{Q}^+)^{P \cup T} \parallel v \parallel = P \cup T$  vérifiant  $v^t.C_T = \vec{0}$ .  
D'après la première équivalence :  
 $\exists w_1 \in \mathbb{Q}^T$  vérifiant  $C_T.w_1 > \vec{0}$ . Ce qui se traduit par  $C.w_1 \geq \vec{0}$  et  $w_1 \geq \vec{0}$   
et :  
- soit  $C.w_1 > \vec{0}$  et  $w_1$  est le vecteur recherché,  
- soit  $C.w_1 = \vec{0}$  et  $w_1 > \vec{0}$ ,  
Posons  $T_1 = T \setminus \|w_1\|$ , d'après l'hypothèse on a aussi :  
 $\nexists v \in (\mathbb{Q}^+)^{P \cup T_1}$ ,  $\parallel v \parallel = P \cup T_1$  vérifiant  $v^t.C_{T_1} = \vec{0}$ .  
D'après la première équivalence :  
 $\exists w'_2 \in \mathbb{Q}^T$  vérifiant  $C_{T_1}.w'_2 > \vec{0}$ .  
Ce qui se traduit par  $C.w'_2 \geq \vec{0}$  et  $\forall t \in T_1$ ,  $w'_2(t) \geq 0$  et :  
- soit  $C.w'_2 > \vec{0}$   
- soit  $C.w'_2 = \vec{0}$  et  $\exists t \in T_1$ ,  $w'_2(t) > 0$   
Dans le premier cas,  $w_2 = w'_2 + \lambda.w_1 \in (\mathbb{Q}^+)^T$  pour un  $\lambda$  suffisamment grand  
et ce vecteur vérifie  $C.w_2 > \vec{0}$ . C'est donc la solution recherchée.

Dans le second cas, pour un  $\lambda$  suffisamment grand le vecteur  $w_2 = w'_2 + \lambda.w_1 \in (\mathbb{Q}^+)^T$  est tel que  $\|w_1\|$  est strictement inclus dans  $\|w_2\|$  et il vérifie  $C.w_2 = \vec{0}$ . On pose  $T_2 = T \setminus \|w_2\|$  et on itère le procédé.

Si on n'a pas de trouvé de solution au bout du processus, on obtient un vecteur  $w' \in (\mathbb{Q}^+)^T$  tel que  $\|w'\| = T$  vérifiant  $C.w' = \vec{0}$ . On applique alors une dernière fois la première équivalence avec la matrice  $C$  :  
 $\nexists v \in (\mathbb{Q}^+)^P$   $\parallel v \parallel = P$  vérifiant  $v^t.C = \vec{0}$ . D'après la première équivalence :  
 $\exists w'' \in \mathbb{Q}^T$  vérifiant  $C.w'' > \vec{0}$ .  
Pour un  $\lambda$  suffisamment grand,  $w = w'' + \lambda.w'$  est le vecteur recherché.  $\diamond$

### 3.4. Application des invariants à l'étude d'un réseau

Dans ce paragraphe nous appliquons les techniques précédentes au problème des lecteurs/écrivains dans une base de données. Nous considérons une abstraction de ce problème et nous nous focalisons sur les contraintes de synchronisation entre les opérations de lecture et d'écriture exprimées dans le tableau 1. La capacité de la salle de lecture est limitée à  $k$  lecteurs ( $C_1$ ), à tout instant au plus une écriture est possible sur la base de données ( $C_2$ ) et les opérations de lecture et d'écriture sont exclusives ( $C_3$ ).

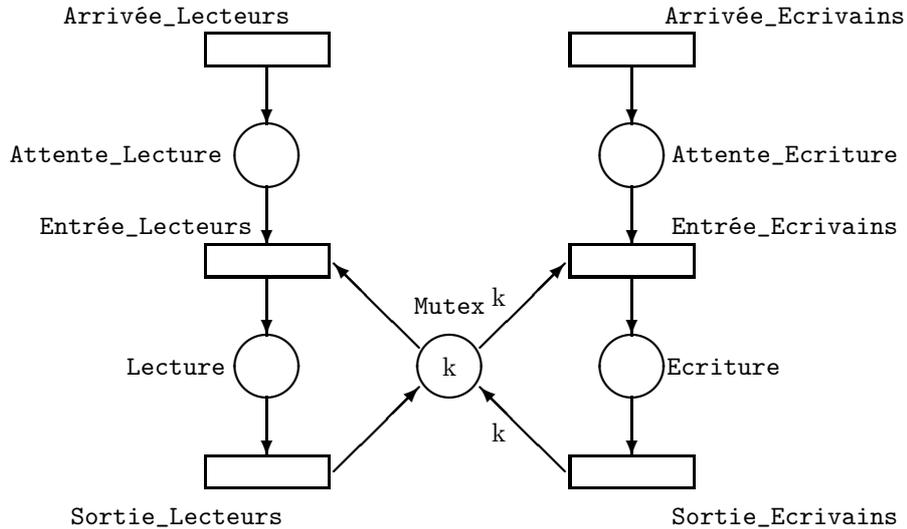
Dans le cas réel, outre les règles de synchronisation exprimées par ces conditions, on doit aussi maintenir la cohérence des données et assurer par exemple que lorsqu'une valeur est lue, elle correspond effectivement à la dernière valeur écrite.

- $C_1$  : Pas plus de  $k$  lectures simultanées
- $C_2$  : Pas plus d'un écrivain dans la base
- $C_3$  : Pas de lecture et d'écriture simultanément dans la base

Tableau 1: Conditions de synchronisation entre lecteurs et écrivains

## 3.4.1. Modélisation du problème lecteurs/écrivains

La figure 4 présente une modélisation possible de ce problème par un réseau de Petri. Cette modélisation est générique au sens où la capacité de la salle de lecture est représentée par un paramètre, l'entier positif  $k$ . Celui-ci apparaît à la fois dans le marquage initial du réseau (place **Mutex**) et comme valuation des arcs reliant la place **Mutex** aux transitions **Entrée\_Ecrivains** et **Sortie\_Ecrivains**. Notre système de base de données est constitué de deux salles d'attente : l'une pour les lecteurs (**Attente\_Lecture**) et l'autre pour les écrivains (**Attente\_Ecriture**), d'une salle de lecture (**Lecture**) et d'une salle d'écriture (**Ecriture**). La partie gauche du réseau décrit le traitement associé aux lecteurs tandis que la partie droite concerne le traitement des écrivains. La partie centrale (place **Mutex**) assure la synchronisation entre lecteurs et écrivains.

Figure 4: Problème des lecteurs/écrivains ( $k \geq 1$ )

Nous détaillons ci-dessous les aspects dynamiques induits par la modélisation.

**Lecture :** La transition `Arrivée_Lecteurs` représente l'arrivée de nouveaux lecteurs dans le système. Ceux-ci attendent pour lire dans une salle d'attente représentée par la place `Attente_Lecture`. La transition `Entrée_Lecteurs` représente l'entrée d'un lecteur dans la base. La place `Lecture` matérialise le nombre de lectures en cours. Finalement la transition `Sortie_Lecteurs` correspond à la sortie d'un lecteur du système.

**Écriture :** Si on fait abstraction de la synchronisation réalisée dans la partie centrale du réseau et décrite dans le paragraphe suivant, le traitement des écrivains est analogue à celui des lecteurs. Géométriquement, cette analogie se matérialise par une symétrie du réseau selon un axe imaginaire vertical passant par la place `Mutex`.

**Synchronisation entre lecteurs et écrivains :** La place `Mutex`, précondition commune des transitions `Entrée_Lecteurs` et `Entrée_Ecrivains`, réalise la synchronisation entre les opérations de lecture et d'écriture :

- La capacité effective de la salle de lecture est matérialisée par le marquage de la place `Mutex` : l'entrée d'un nouveau lecteur n'est possible que dans la mesure où il reste de la place dans la salle de lecture ( $m(\text{Mutex}) \geq 1$ ). Lorsqu'un lecteur quitte la salle de lecture (transition `Sortie_Lecteurs`), le marquage de `Mutex` est incrémenté.
- Pour qu'une écriture soit possible il faut que la capacité effective de la salle de lecture soit maximale ( $m(\text{Mutex}) = \text{Pré}(\text{Mutex}, \text{Entrée\_Ecrivains}) = k$ ). L'entrée d'un écrivain consomme les  $k$  jetons de la place `Mutex` et produit un jeton dans la place `Ecriture`. La sortie d'un écrivain (transition `Sortie_Ecrivains`) incrémente de  $k$  jetons le marquage de la place `Mutex`.

#### 3.4.2. Vérification des contraintes de synchronisation

##### Expression des propriétés en termes du réseau

La première étape consiste à reformuler les propriétés de synchronisation exprimées dans le tableau 1 en utilisant les "éléments de langage" fournis par le réseau que nous avons proposé. Concrètement, il s'agit ici de traduire ces conditions en termes de marquage des places `Lecture` et `Ecriture`. Le tableau 2 présente la traduction proposée. Il s'agit d'invariants qui doivent être satisfaits par tout marquage accessible.

##### Calcul des *P*-flots

Nous appliquons le calcul des flots à la matrice d'incidence décrite ci-dessous. L'introduction de paramètres tels que  $k$  ne soulève pas de difficultés sérieuses

$\forall m \in A(R, m_0)$ ,

$C_1 : m(\text{Lecture}) \leq k$	Pas plus de $k$ lectures simultanées
$C_2 : m(\text{Ecriture}) \leq 1$	Pas plus d'un écrivain dans la base
$C_3 : m(\text{Ecriture}).m(\text{Lecture}) = 0$	Pas de lecture et d'écriture simultanément dans la base

Tableau 2: Traduction des conditions de synchronisation du tableau 1

pour l'élimination de Gauss. Au lieu d'opérer sur le corps des rationnels, l'élimination agit sur un anneau de polynômes dont les variables sont les paramètres du réseau. La seule adaptation significative consiste à maintenir un polynôme "condition" (produit des pivots successifs) qui garantit que si les valeurs des paramètres n'annulent pas ce polynôme, alors la famille de flots trouvée est une famille génératrice.

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \text{ArL} & \text{EnL} & \text{SoL} & \text{ArE} & \text{EnE} & \text{SoE} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -k & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \vec{AL} \\ \vec{L} \\ \vec{M} \\ \vec{AE} \\ \vec{E} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Nous avons substitué aux noms des places et transitions, les premières (et éventuellement les deuxièmes) lettres des mots qui les composent. L'élimination des colonnes  $ArL$  et  $ArE$  fait disparaître respectivement les vecteurs  $\vec{AL}$  et  $\vec{AE}$ . L'élimination de la colonne  $SoL$  combine  $\vec{M}$  et  $\vec{L}$  en un flot partiel  $\vec{L} + \vec{M}$ . L'élimination de la colonne  $SoE$  combine ce flot partiel avec  $\vec{E}$  pour fournir le flot :

$$\vec{L} + \vec{M} + k.\vec{E}$$

Les colonnes restantes sont nulles et ce flot constitue la famille génératrice. Dans ce cas particulier, le polynôme condition est la constante 1, ce qui signifie que la famille est valable pour toutes les valeurs du paramètre. En appliquant ce flot au marquage initial, on obtient :

$$\forall m \in A(R, m_0), m(\text{Lecture}) + m(\text{Mutex}) + k.m(\text{Ecriture}) = k$$

### Preuve des contraintes de synchronisation

A l'aide de l'invariant précédent, montrons que les conditions du tableau 2 sont satisfaites.

$C_1$  : En isolant  $m(\text{Lecture})$  dans l'invariant, on obtient :

$$m(\text{Lecture}) = k - (m(\text{Mutex}) + k.m(\text{Ecriture})) \leq k$$

$C_2$  : En isolant  $m(\text{Ecriture})$  dans l'invariant, on obtient :

$$k.m(\text{Ecriture}) = k - (m(\text{Mutex}) + m(\text{Lecture})) \leq k$$

$$k \neq 0 \Rightarrow m(\text{Ecriture}) \leq 1$$

$C_3$  :  $C_3$  se réécrit  $m(\text{Lecture}) \neq 0 \Rightarrow m(\text{Ecriture}) = 0$ .

Supposons  $m(\text{Lecture}) \neq 0$ , alors :

$$k.m(\text{Ecriture}) = k - (m(\text{Mutex}) + m(\text{Lecture})) < k$$

$$k \neq 0 \Rightarrow m(\text{Ecriture}) < 1 \Rightarrow m(\text{Ecriture}) = 0$$

### 3.4.3. Discussion

Le fait que le calcul de flots opère sur des réseaux paramétrés montre la puissance de la méthode. Nous avons ainsi établi les propriétés recherchées non pour un réseau marqué mais pour une famille (indexée par  $k > 0$ ) de réseaux marqués. Dans ce cas, une approche exhaustive basée sur la construction du graphe d'accessibilité ou ici de l'arbre de couverture de Karp et Miller (présentée au chapitre suivant) puisque les places `Attente_Lecture` et `Attente_Ecriture` sont non bornées n'aurait pu être conduite que pour une valeur fixe du paramètre  $k$ .

Le calcul des invariants est une approche efficace pour la vérification des propriétés dites de "sûreté". Cette classe de propriétés invariantes s'expriment de manière intuitive par l'énoncé général "Rien de mauvais ne peut arriver". Pour notre exemple, le "mauvais" eût été la violation des conditions de synchronisation.

Dans la pratique la vérification passe aussi par la satisfaction de propriétés dites de "vivacité" qui expriment quant à elles que "Quelque chose de bon doit arriver". Toujours pour notre exemple, il serait utile de vérifier qu'un lecteur potentiel ne restera pas indéfiniment en attente dans la salle de lecture, ou en d'autres termes, que toute requête d'entrée dans la salle de lecture sera honorée au bout d'un temps fini<sup>2</sup>. Notre modélisation ne satisfait pas cette propriété : ainsi à partir du marquage  $\overrightarrow{\text{Attente\_Lecture}} + k.\overrightarrow{\text{Mutex}}$  (un lecteur est en attente de lecture) la séquence  $\sigma_1 = (\text{Arrive\_Ecrivains}.$

<sup>2</sup>La situation est identique pour les opérations d'écriture

$\text{Entre\_Ecrivains} \cdot \text{Sortie\_Ecrivains})^\infty$  est possible et conduit à exécuter une infinité d'écritures tandis que le lecteur demeure indéfiniment en attente. A partir du même marquage, il est aussi possible d'exécuter la séquence infinie  $\sigma_2 = \text{Arrive\_Ecrivains}^\infty$  laissant de nouveau le lecteur indéfiniment en attente. Le recours aux  $T$ -semiflots ne peut fournir que des indications partielles pour la mise en évidence de ce type de comportement. Ainsi les exécutions du type de  $\sigma_1$  peuvent être suspectées par l'existence du  $T$ -semiflot  $\overrightarrow{\text{Arrive\_Ecrivains}} + \overrightarrow{\text{Entre\_Ecrivains}} + \overrightarrow{\text{Sortie\_Ecrivains}}$ . Par contre une exécution du type  $\sigma_2$  n'est associée à aucun  $T$ -semiflot.

La première partie du deuxième tome de cet ouvrage présentera des techniques spécifiques, notamment basées sur des logiques temporelles, supportant la spécification et la vérification automatique (sans recourir à l'intuition du vérificateur) des propriétés générales de comportement.

#### 4. Réductions de réseaux

Une réduction est une transformation de réseau qui réduit la taille du réseau de telle sorte que, pour un ensemble de propriétés, le réseau réduit soit équivalent au réseau initial [BER 87]. Une réduction est caractérisée par :

- ses conditions d'applications,
- la transformation du réseau,
- les propriétés préservées (i.e. celles dont la vérification peut s'effectuer sur le réseau réduit).

Du point de vue théorique, la définition d'une réduction soulève quelques problèmes méthodologiques :

- Afin d'être fréquemment vérifiées, les conditions d'application doivent correspondre à un schéma de comportement qu'on rencontre souvent au cours d'une modélisation. Il s'agit alors d'établir des conditions structurelles garantissant ce type de comportement. Par exemple il est exclu que la vérification d'une condition nécessite la construction du graphe des marquages accessibles.
- Il faut aussi s'assurer que la transformation de réseau soit efficace. Autrement dit l'essentiel n'est pas de réduire de manière significative la taille du réseau mais celle du graphe d'accessibilité.
- Enfin puisqu'on s'intéresse aux propriétés générales du réseau, il est important que parmi les propriétés préservées se trouvent le caractère borné et la vivacité qui sont certainement les plus significatives en termes de comportement.

Dans [BER 83] un jeu de dix réductions est proposé dont nous n'examinerons que trois d'entre elles car, d'une part leurs conditions d'application sont

entièrement structurelles et d'autre part elles recouvrent des cas typiques de modélisation. D'autres ensembles de réductions alternatives ont été définies dans [COL 86, HAD 87, SCH 00]. Deux de ces réductions portent sur les transitions, la pré-agglomération et la post-agglomération et la dernière est la suppression de place implicite.

Nous appellerons *Prop* l'ensemble des propriétés suivantes : existence de séquence infinie, pseudo-vivacité, quasi-vivacité, vivacité, existence d'un état d'accueil, caractère borné.

#### 4.1. Pré-agglomération de transitions

Cette réduction porte sur une transition  $h$  dont le franchissement est *nécessaire* au franchissement d'une quelconque des transitions d'un ensemble  $F$  et ceci par l'intermédiaire d'une place  $p$ . Le principe de la pré-agglomération consiste à ne considérer dans le réseau réduit que des séquences où le franchissement de  $h$  est immédiatement suivi du franchissement d'une transition  $f$  de  $F$ . Dans le réseau réduit,  $h$  et  $F$  ont disparu et un ensemble de transitions  $h.f$  (une par transition de  $F$ ) est créée. Les conditions structurelles de la prochaine définition garantissent que :

- dans une séquence de franchissement où une occurrence de  $h$  est ultérieurement suivie par une occurrence de  $f$ , on peut **retarder** l'occurrence de  $h$  jusqu'à celle de  $f$  ;
- dans une séquence de franchissement où une occurrence de  $h$  n'est pas suivie par une occurrence de  $f$ , on peut **supprimer** l'occurrence de  $h$ .

Ces deux propriétés sur les séquences (ainsi que quelques propriétés additionnelles) assurent l'équivalence des deux réseaux vis à vis de *Prop*.

**Définition 36 (Transitions pré-agglomérables)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri ; un ensemble de transitions  $F$  est pré-agglomérable avec une transition  $h$  n'appartenant pas à  $F$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Il existe une place  $p$  modélisant un état intermédiaire entre le franchissement de  $h$  et celui d'une transition de  $F$  :  

$$m_0(p) = 0, \text{ Post}(p) = \vec{h} \text{ et } \text{Pré}(p) = \sum_{f \in F} \vec{f}$$
2.  $h$  ne produit des marques que dans  $p$  :  $\text{Post}(h) = \vec{p}$
3.  $h$  ne partage ses entrées avec aucune autre transition :  

$$\forall t' \neq t, \bullet t' \cap \bullet t = \emptyset$$
4.  $h$  a au moins une place en entrée :  $\bullet h \neq \emptyset$

La première hypothèse synchronise les franchissements des transitions de  $F$  avec ceux de  $h$ . Dans un marquage,  $m(p)$  représente alors l'excès de franchissements de  $h$  vis à vis de ceux de  $F$ . La seconde hypothèse assure que le

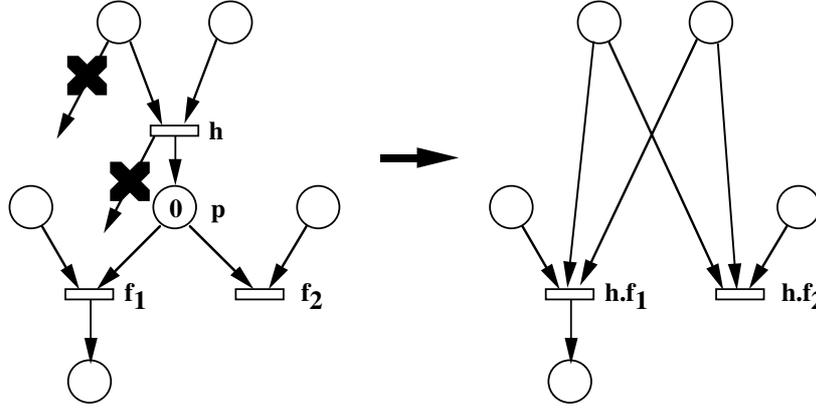


Figure 5: Pré-agglomération de transitions

franchissement de  $h$  n'est utile que pour le franchissement d'une transition de  $F$  (voir plus haut pour la suppression d'occurrence). L'hypothèse suivante implique que si  $h$  est franchissable alors elle le demeure jusqu'à ce qu'elle soit franchie (voir plus haut pour le délai d'occurrence). Enfin la dernière hypothèse est nécessaire pour l'équivalence du caractère borné entre le réseau réduit et le réseau originel.

**Définition 37 (Pré-agglomération de réseau)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri pré-agglomérable, alors  $(R', m'_0)$  le réseau réduit est défini par :

- $P' = P \setminus \{p\}$  et  $T' = T \setminus (F \cup \{h\}) \cup \{h.f \mid f \in F\}$
- $\forall t \in T' \cap T, \text{Pré}'(t) = \text{Pré}(t)$  et  $\text{Post}'(t) = \text{Post}(t)$
- $\forall f \in F, \text{Pré}'(h.f) = \text{Pré}(h) + \text{Pré}(f) - \vec{p}$  et  $\text{Post}'(h.f) = \text{Post}(f)$
- $\forall p' \in P', m'_0(p') = m_0(p')$

La figure 5 montre le schéma de la pré-agglomération et la transformation du réseau.

Il est aisé de vérifier que l'ensemble d'accessibilité du nouveau réseau est isomorphe aux marquages accessibles du réseau initial pour lesquels  $p$  n'est pas marquée. On constate empiriquement que cette réduction divise la taille de l'ensemble d'accessibilité de l'ordre de 2 et  $n$  réductions successives diviseront la taille du réseau de l'ordre de  $2^n$ . Cette remarque vaut aussi pour la réduction suivante. A partir des conditions d'application, nous obtenons :

**Proposition 38 (Préservation des propriétés)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau pré-agglomérable et  $\pi$  une propriété de Prop :  $(R, m_0)$  satisfait  $\pi \Leftrightarrow (R', m'_0)$  satisfait  $\pi$

#### 4.2. Post-agglomération de transitions

Cette réduction porte sur un ensemble de transitions  $H$  dont le franchissement de n'importe laquelle des transitions est *nécessaire et suffisant* au franchissement d'une quelconque des transitions d'un ensemble  $F$  et ceci par l'intermédiaire d'une place  $p$ . Le principe de la post-agglomération consiste à ne considérer dans le réseau réduit que des séquences où le franchissement d'une transition  $h$  de  $H$  est immédiatement suivi du franchissement d'une transition  $f$  de  $F$ . Dans le réseau réduit,  $H$  et  $F$  ont disparu et un ensemble de transitions  $h.f$  (une par paire de transitions de  $H \times F$ ) est créée. Les conditions structurelles de la prochaine définition garantissent que :

- dans une séquence de franchissement où une occurrence de  $h$  est ultérieurement suivie par une occurrence de  $f$ , on peut **avancer** l'occurrence de  $f$  jusqu'à celle de  $h$
- dans une séquence de franchissement où une occurrence de  $h$  n'est pas suivie par une occurrence de  $f$ , on peut **ajouter** une occurrence de  $f$

Ces deux propriétés sur les séquences (ainsi que quelques propriétés additionnelles) assurent l'équivalence des deux réseaux vis à vis de *Prop*.

**Définition 39 (Transitions post-agglomérables)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri, un ensemble de transitions  $F$  est post-agglomérable avec un ensemble de transitions  $H$  disjoint de  $F$  si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Il existe une place  $p$  modélisant un état intermédiaire entre le franchissement de  $h$  et celui d'une transition de  $F$  :  

$$m_0(p) = 0, \text{ Post}(p) = \sum_{h \in H} \vec{h} \text{ et } \text{Pré}(p) = \sum_{f \in F} \vec{f}$$
2. Les transitions de  $F$  n'ont pas d'autre entrée que  $p$  :  $\forall f \in F, \text{Pré}(f) = \vec{p}$
3. Il existe une transition  $f$  de  $F$  ayant une place en sortie :  

$$\exists f \in F, f^\bullet \neq \emptyset.$$

Comme pour la pré-agglomération, la première hypothèse synchronise le franchissement des transitions de  $H$  et de celles de  $F$ . La seconde hypothèse (point clef de la post-agglomération) assure que toute transition  $f$  de  $F$  est franchissable dès que  $p$  est marquée (voir la discussion plus haut). Enfin la dernière hypothèse est nécessaire pour l'équivalence du caractère borné entre le réseau réduit et le réseau originel.

**Définition 40 (Post-agglomération de réseau)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri post-agglomérable, alors  $(R', m'_0)$  le réseau réduit est défini par :

- $P' = P \setminus \{p\}$  et  $T' = T \setminus (F \cup H) \cup \{h.f \mid f \in F, h \in H\}$
- $\forall t \in T' \cap T, \text{Pré}'(t) = \text{Pré}(t)$  et  $\text{Post}'(t) = \text{Post}(t)$
- $\forall f \in F, \forall h \in H, \text{Pré}'(h.f) = \text{Pré}(h)$  et  

$$\text{Post}'(h.f) = \text{Post}(h) + \text{Post}(f) - \vec{p}$$

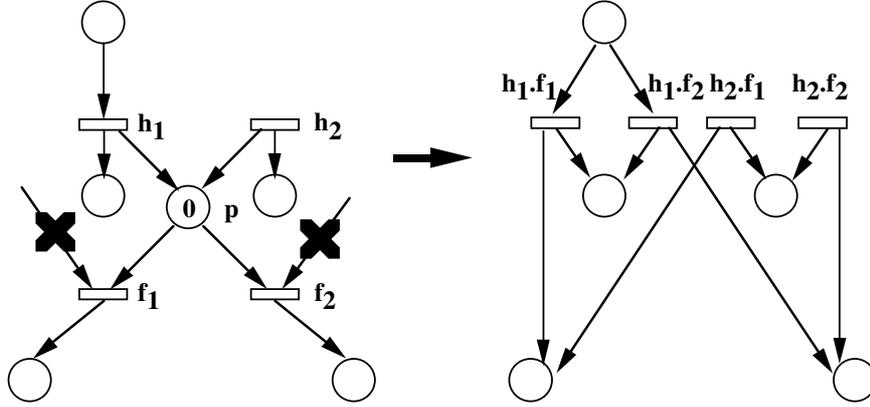


Figure 6: Post-agglomération de transitions

$$- \forall p' \in P', m'_0(p') = m_0(p')$$

La figure 6 montre le schéma de la post-agglomération et la transformation du réseau.

Ici aussi nous avons :

**Proposition 41 (Préservation des propriétés)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau post-agglomérable et  $\pi$  une propriété de Prop :  $(R, m_0)$  satisfait  $\pi \Leftrightarrow (R', m'_0)$  satisfait  $\pi$

### 4.3. Suppression de place implicite

La suppression de place implicite consiste à éliminer du réseau une place qui n'est jamais à elle seule un obstacle au franchissement de transitions. D'une certaine façon, cette place est un témoin d'activité sans influence sur le comportement du réseau. L'existence d'une place implicite est entre autres caractérisée par l'existence d'un invariant linéaire particulier ce qui montre une nouvelle fois l'intérêt du calcul d'invariants. Par elle-même, cette réduction laisse inchangée la taille de l'ensemble d'accessibilité mais très souvent **elle rend applicable d'autres réductions** qui cette fois-ci diminuent cette taille.

**Définition 42 (Place implicite)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri. Une place  $p_0$  est dite implicite si :

1. Il existe un P-flot  $v = \sum_{p \in P} \lambda_p \cdot \vec{p}$  avec  $\lambda_{p_0} > 0$  et  $\forall p \neq p_0, \lambda_p \leq 0$
2.  $\forall t \in T, v^t \cdot m_0 \geq v^t \cdot \text{Pré}(t)$

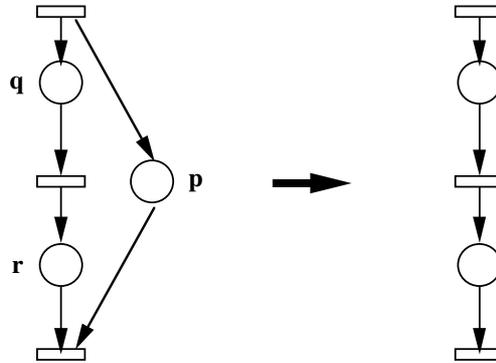


Figure 7: Suppression de place implicite

La seconde hypothèse assure qu’initialement une place implicite ne peut empêcher seule le franchissement d’une transition. La première condition garantit que cette hypothèse est reproduite pour tout marquage accessible.

**Définition 43 (Suppression de place implicite)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri où  $p_0$  est une place implicite ; alors  $(R', m'_0)$  le réseau réduit est défini par la suppression de  $p$  et des arcs adjacents.

La figure 7 montre un cas de place implicite et la transformation du réseau. Le  $P$ -flot de la définition est ici :  $\vec{p} - \vec{q} - \vec{r}$

A nouveau, nous obtenons :

**Proposition 44 (Préservation des propriétés)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau doté d’une place implicite et  $\pi$  une propriété de Prop :  $(R, m_0)$  satisfait  $\pi \Leftrightarrow (R', m'_0)$  satisfait  $\pi$

Une analyse complète d’un réseau à l’aide des réductions sera exposée au cours du chapitre 8 sur les réseaux de haut-niveau.

## 5. Le “graphe” réseau de Petri

Le réseau de Petri peut être vu comme un graphe biparti dont les arcs sont valués par des entiers. Il s’agit dans cette section de tirer profit de l’analyse de ce graphe pour obtenir des indications sur le comportement du réseau. Nous commencerons par des résultats généraux applicables à tout réseau. Puis nous nous restreindrons à des sous-classes remarquables pour lesquels une analyse structurelle approfondie a été conduite avec succès.

### 5.1. Résultats généraux

Examinons d'abord l'influence de la (forte) connexité sur le comportement du réseau. Si le réseau n'est pas connexe, chaque composante connexe est un réseau indépendant. Aussi nous nous restreindrons sans perte de généralité à des réseaux connexes. En introduction du résultat classique sur la forte connexité, examinons les deux réseaux suivants :

- Un réseau constitué d'une place entrée d'une transition. Ce réseau (non fortement connexe) est borné et non vivant.
- Un réseau constitué d'une transition entrée d'une place. Ce réseau (non fortement connexe) est vivant et non borné.

Ces deux exemples élémentaires suggèrent la proposition suivante.

**Proposition 45** *Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri vivant et borné ; alors  $R$  est un graphe fortement connexe.*

#### Preuve

Raisonnons sur la contraposée. Soit  $R$  un graphe (connexe) non fortement connexe ; alors il existe une c.f.c. initiale  $\mathcal{C}$  qui a (au moins) un arc sortant vers une autre c.f.c.  $\mathcal{C}'$ . Supposons de plus que  $(R, m_0)$  est vivant. Nous subdivisons la preuve selon la nature de cet arc.

**Cet arc est un arc  $t \rightarrow p$ .** Puisque  $\mathcal{C}$  est initiale, le réseau restreint à  $\mathcal{C}$  est vivant. Donc il existe une séquence de franchissement de  $\mathcal{C}$  comportant une infinité d'occurrences de  $t$ . Par définition, la place  $p$  n'est entrée d'aucune transition de  $\mathcal{C}$ . Son marquage croît indéfiniment sous l'effet de cette séquence donc  $(R, m_0)$  n'est pas borné.

**Cet arc est un arc  $p \rightarrow t$ .** Il existe une séquence de franchissement de  $(R, m_0)$  comportant une infinité d'occurrences de  $t$ . Si nous projetons cette séquence sur les transitions de  $\mathcal{C}$ , alors à nouveau puisque  $\mathcal{C}$  est initiale cette séquence projetée est une séquence de franchissement. Par définition, aucune transition autre que celles de  $\mathcal{C}$  ne fournit des jetons à  $p$ . Posons  $\sigma_n$  une sous-séquence finie de la séquence initiale comportant  $n$  franchissements de  $t$ ,  $m_n$  le marquage atteint,  $\sigma'_n$  la projection de  $\sigma_n$  sur les transitions de  $\mathcal{C}$  et  $m'_n$  le marquage atteint. Alors puisque  $t$  consomme au moins un jeton de  $p$ ,  $m'_n(p) \geq m_n(p) + n \geq n$ . Le réseau n'est donc pas borné.  $\diamond$

**Exemple 14** A nouveau le réseau non vivant de la figure 3 vérifie la condition de forte connexité.

Le prochain résultat que nous allons présenter est une autre condition nécessaire pour qu'un réseau soit vivant et borné. Cette proposition est intéressante à

double titre. D'une part, elle est obtenue par combinaison de l'étude du graphe du réseau et des techniques d'algèbre linéaire. D'autre part, elle met en évidence la raison pour laquelle de nombreux résultats ont été obtenus pour les sous-classes du prochain paragraphe. Nous suivons [TER 94] pour le développement de la preuve.

Il est d'abord nécessaire de rappeler quelques notions élémentaires d'algèbre linéaire.

**Définition 46 (Famille indépendante, rang d'une matrice)**

Soit  $\{v_1, \dots, v_n\}$  une famille de vecteurs de  $\mathbb{Q}^E$ , cette famille est dite linéairement indépendante si :

$$\forall \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \in \mathbb{Q}^n \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = 0 \Rightarrow \forall i \lambda_i = 0 \right)$$

Soit  $A$  une matrice. Le rang de  $A$ , noté  $\text{rang}(A)$ , est défini comme la taille de la plus grande famille de ses vecteurs colonnes linéairement indépendante.

On démontre qu'il est équivalent de définir le rang à l'aide des vecteurs lignes.

Remarquons que si le réseau est consistant, alors  $\text{rang}(C) < |T|$ . De la proposition 33, on déduit que si un réseau est borné et vivant alors cette condition est satisfaite. Nous allons améliorer cette borne supérieure à l'aide d'une relation d'équivalence entre transitions.

**Définition 47 (Relation de conflit égal)** Soit  $R$  un réseau de Petri. Deux transitions  $t$  et  $t'$  sont dites en relation de conflit égal si :  $\text{Pré}(t) = \text{Pré}(t')$

Cette relation est une relation d'équivalence. On notera  $\Theta$  l'ensemble des classes d'équivalence.

Le point clef de cette relation est que les transitions d'une classe d'équivalence sont toujours simultanément franchissables. Nous souhaitons transformer le réseau de telle sorte que toutes les classes d'équivalence soient réduites à un élément. Nous allons procéder de manière itérative.

**Définition 48** Soit  $R$  un réseau de Petri, soit  $E = \{t_0, \dots, t_{k-1}\}$  une classe d'équivalence de  $\Theta$  avec  $k > 1$ . Le réseau  $R_E$  est défini par :

- $P_E = P \cup \{p_0, \dots, p_{k-1}\}$  où les  $p_i$  sont de nouvelles places,
- $T_E = T$
- $\forall p \in P \text{ Pré}_E(p) = \text{Pré}(p)$ ,  $\text{Post}_E(p) = \text{Post}(p)$
- $\forall 0 \leq i < k \text{ Post}_E(p_i) = \overrightarrow{t_{(i-1) \bmod k}}$ ,  $\text{Pré}_E(p_i) = \overrightarrow{t_i}$

De manière informelle, on superpose au réseau initial, un circuit constitué alternativement par les  $t_i$  et les  $p_i$ . Le lemme suivant justifie la transformation.

**Lemme 49** Si  $(R, m_0)$  est vivant et borné alors :

- $\exists m'_0$  tel que  $(R_E, m'_0)$  soit vivant et borné

$$- \text{rang}(C_E) = \text{rang}(C) + |E| - 1$$

### Preuve

Soit  $m$  un marquage accessible de  $(R, m_0)$  et  $t$  une transition. Puisque  $(R, m_0)$  est vivant, il existe une séquence  $\sigma$  telle que  $m[\sigma.t]$ . Posons  $\Delta(m, t)$  le nombre d'occurrences de transitions de  $E$  dans  $\sigma$  et  $\Delta$  le maximum de  $\Delta(m, t)$  pour tous les  $m$  accessibles et  $t \in T$  (en nombre fini puisque le réseau est borné). Nous définissons  $m'_0$  par :

$$\forall p \in P \quad m'_0(p) = m_0(p) \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq i < k \quad m'_0(p_i) = \Delta$$

Plaçons nous dans  $(R_E, m'_0)$  et soit  $m'$  un marquage accessible dans ce réseau par la séquence  $m'_0[\sigma]m'$ . Montrons d'abord que nous pouvons nous ramener au marquage initial des places  $p_i$ . Appelons  $s()$ , la fonction qui associe à la transition  $t_i$  la séquence de transitions dans  $E : t_{(i+1) \bmod k} \cdots t_{(i-1) \bmod k}$ . Le rôle de cette séquence est de remettre en place le jeton de  $p_i$  déplacé par  $t_i$ . Autrement dit, sur les places  $\{p_j\}$  la séquence  $s(t_i)$  annule l'effet de  $t_i$ . Cette fonction s'étend aux séquences de manière usuelle. Soit  $\sigma_{\lfloor E}$  la projection de  $\sigma$  sur les transitions de  $E$ . Posons  $\sigma_1 = s(\widetilde{\sigma_{\lfloor E}})$ . Clairement,  $m'[\sigma_1]_{\{p_j\}_{0 \leq j < k}}$  puisqu'on annule l'effet de chaque transition de  $E$  en commençant par la dernière franchie.  $m'$  restreint à  $P$  est un marquage accessible de  $(R, m_0)$ . Donc il existe une plus courte séquence  $\sigma_2$  dans ce réseau pour franchir une transition de  $E$ .  $\sigma_2$  ne comporte pas de transitions de  $E$  et peut être franchie dans  $(R_E, m')$  conduisant à un marquage où la première transition de  $\sigma_1$  est franchissable. On la franchit et on itère ce procédé jusqu'au franchissement complet de toutes les transitions de  $\sigma_1$ . Le marquage atteint  $m''$  est identique au marquage initial sur les places  $\{p_j\}_{0 \leq j < k}$  et correspond à un marquage accessible  $m^*$  de  $(R, m_0)$  sur  $P$ . Soit maintenant une transition  $t$  quelconque ; on peut franchir dans  $(R_E, m'')$  la séquence terminée par  $t$  correspondant à  $\Delta(m^*, t)$  occurrences de transitions de  $E$ .  $(R_E, m'_0)$  est donc vivant.

$(R_E, m'_0)$  est borné car, d'une part la projection sur  $P$  d'un marquage accessible est un marquage accessible de  $(R, m_0)$  (réseau borné) et d'autre part les places  $\{p_j\}$  sont bornées en raison du semiflot  $\vec{p}_0 + \cdots + \vec{p}_{k-1}$ .

Intéressons-nous maintenant au rang de  $C_E$ . Nous allons raisonner sur les vecteurs lignes (i.e. les incidences des places) de  $C_E$ . On remarque tout d'abord que  $C_E$  comporte  $|E|$  lignes supplémentaires correspondant aux  $\{p_j\}_{0 \leq j < k}$  mais que les vecteurs associés ne sont pas linéairement indépendants en raison du semiflot  $\vec{p}_0 + \cdots + \vec{p}_{k-1}$ . Nous en déduisons que  $\text{rang}(C_E) \leq \text{rang}(C) + |E| - 1$ . Nous pouvons donc retirer l'un quelconque de ces vecteurs lignes en conservant le même rang. Nous supprimons par exemple celui indicé par  $p_0$ . Pour avoir l'inégalité stricte, il faudrait qu'un vecteur ligne indicé par  $p_i$  s'exprime comme

combinaison linéaire des autres vecteurs lignes. Autrement dit :

$$C(p_i) = \sum_{p \in P} \lambda_p \cdot C(p) + \sum_{p_j \neq p_i, p_0} \lambda_j \cdot C(p_j)$$

Puisque  $(R, m_0)$  est vivant, il existe une plus courte séquence pour franchir l'une quelconque des transitions de  $E$ ; nous la franchissons ainsi que  $t_0$  puis nous recommençons avec  $t_1$  et ainsi de suite jusqu'à  $t_{i-1}$  où on redémarre avec  $t_0$ . Soit  $\sigma_n$  la séquence comprenant  $n$  étapes de ce procédé et  $\vec{\sigma}_n$  son vecteur d'occurrences alors :

$$\begin{aligned} - C(p_i)^t \cdot \vec{\sigma}_n &= \sum_{p \in P} \lambda_p \cdot C(p)^t \cdot \vec{\sigma}_n + \sum_{p_j \neq p_i, p_0} \lambda_j \cdot C(p_j)^t \cdot \vec{\sigma}_n \\ - C(p_i)^t \cdot \vec{\sigma}_n &= n \\ - \forall p_j \neq p_i, p_0 \quad C(p_j)^t \cdot \vec{\sigma}_n &= 0 \\ - \forall p \in P, -m_0(p) \leq C(p)^t \cdot \vec{\sigma}_n &\leq B - m_0(p) \text{ où } B \text{ est une borne du réseau} \\ &\quad (R, m_0) \end{aligned}$$

mais en faisant tendre  $n$  vers l'infini, le terme gauche de la première égalité tend vers l'infini tandis que le terme droit reste borné. Ainsi l'équation entre les rangs est vérifiée.  $\diamond$

Nous sommes en mesure d'exprimer notre nouvelle condition.

**Proposition 50** *Si  $(R, m_0)$  est vivant et borné alors  $\text{rang}(C) < |\Theta|$*

### Preuve

Nous appliquons la construction précédente sur toutes les classes d'équivalence de taille supérieure à 1. Soit  $(R', m'_0)$  le réseau obtenu, en vertu de la condition nécessaire de consistance énoncée dans la proposition 33 :  $\text{rang}(C') < |T'| = |T|$  mais d'autre part  $\text{rang}(C') = \text{rang}(C) + \sum_{E \in \Theta} (|E| - 1) = \text{rang}(C) + |T| - |\Theta|$ . En remplaçant  $\text{rang}(C')$  dans l'inégalité par son expression, on obtient le résultat voulu.  $\diamond$

**Exemple 15** Cette fois-ci le réseau non vivant de la figure 3 ne vérifie pas la condition nécessaire bien qu'il soit borné. En effet le rang de la matrice  $C$  est 4 (une famille génératrice de 2  $P$ -flots pour 6 transitions) et  $|\Theta| = 4$  ( $\{ACH, ACV\}$ ,  $\{BCH, BCV\}$ ,  $\{RVH\}$  et  $\{RVV\}$  sont les différentes classes d'équivalence). Comme cette condition est indépendante du marquage initial et que le réseau est structurellement borné, on en déduit qu'il n'existe pas de marquage rendant vivant ce réseau.

## 5.2. Machines à états

Nous présenterons trois sous-classes par ordre de complexité d'analyse croissante : les machines à états, les graphes d'événements et les réseaux à choix

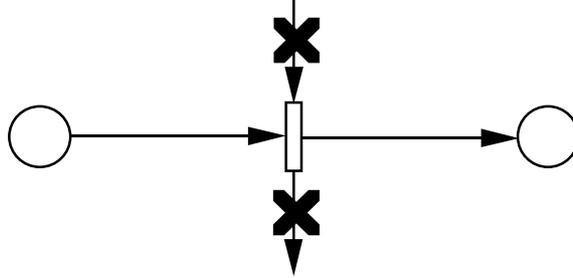


Figure 8: Contraintes des machines à états

libre. Pour ces classes, de nombreuses propriétés comportementales sont caractérisées par des conditions structurelles. La vérification de ces caractérisations s'effectue alors à l'aide d'algorithmes très efficaces par comparaison avec les algorithmes applicables aux réseaux de Petri ordinaires. Comme précédemment, nous supposons que le réseau est connexe.

Une machine à état peut s'interpréter comme un automate partagé par plusieurs processus anonymes. Les places décrivent les états, les transitions représentent les changements d'état et le marquage d'une place indique le nombre de processus dans l'état correspondant (voir la figure 8).

**Définition 51 (Machine à états)** *R*, un réseau de Petri, est une machine à états si :  $\forall t \in T, \exists p_{in}, p_{out}$  avec  $Pré(t) = \vec{p}_{in}$  et  $Post(t) = \vec{p}_{out}$

Le flux des jetons est extrêmement simple puisque la consommation d'un jeton donne lieu à la production d'un jeton. Aussi nous obtenons :

**Proposition 52** *Soit R une machine à états ; alors  $\sum_{p \in P} \vec{p}$  est un P-semiflot. En particulier R est conservatif donc structurellement borné.*

La vérification de la vivacité est aussi très aisée et se fait en temps proportionnel à la taille du réseau à l'aide de l'algorithme de Tarjan [AHO 74].

**Proposition 53 (Vivacité d'une machine à états)** *Si R une machine à états alors :*

$$(R, m_0) \text{ est vivant} \Leftrightarrow R \text{ est fortement connexe et } m_0 \neq \vec{0}$$

#### Preuve

Supposons le réseau vivant. Donc l'une des transitions est initialement franchissable, d'où  $m_0 \neq \vec{0}$ . D'autre part, puisque le réseau est borné en appliquant la proposition 45, on déduit que le réseau est fortement connexe. Supposons le réseau initialement marqué et fortement connexe, puisque le réseau est conservatif tout marquage  $m$  possède au moins un jeton dans une place  $p$ . Soit  $t$  une transition quelconque, il existe un chemin de  $p$  à  $t$  (forte connexité). Il suffit

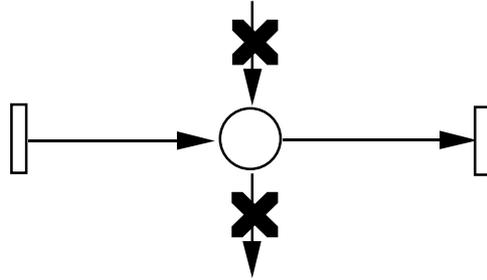


Figure 9: Contraintes des graphes d'événements

alors de franchir successivement les transitions de ce chemin pour franchir  $t$ .

◇

### 5.3. Graphes d'événements

Un graphe d'événements ([COM 71]) est un réseau dans lequel les transitions ne sont jamais en conflit, puisqu'une place est entrée (et sortie) d'une seule transition. Autrement dit, il n'y a pas de véritable choix dans ces réseaux, simplement des ordonnancements différents. Quand une des préconditions du franchissement d'une transition est remplie, elle le demeure jusqu'au franchissement (voir la figure 9).

**Définition 54 (Graphe d'événements)**  $R$ , un réseau de Petri, est un graphe d'événements si :  $\forall p \in P, \exists t_{in}, t_{out}$  avec  $Pré(p) = \overrightarrow{t_{out}}$  et  $Post(p) = \overleftarrow{t_{in}}$

Rappelons qu'un circuit élémentaire est un chemin dans un graphe tel que seuls le premier et le dernier noeuds soient identiques. Remarquons d'abord que le nombre de jetons d'un circuit élémentaire dans un graphe d'événements est invariant puisqu'il ne peut y avoir ni transitions entrantes ni sortantes. Donc les places d'un circuit élémentaire constituent un  $P$ -semiflot. Ce fait est le point de départ de la théorie des graphes d'événements.

**Proposition 55 (Vivacité d'un graphe d'événements)** Si  $R$  est un graphe d'événements, alors :

$$(R, m_0) \text{ est vivant} \Leftrightarrow$$

Tout circuit élémentaire de  $R$  contient une place initialement marquée

#### Preuve

Supposons qu'un circuit élémentaire ne soit pas initialement marqué. Alors

aucune transition de ce circuit ne sera jamais franchie. Donc le réseau n'est pas vivant.

Supposons qu'à l'inverse tous les circuits soient initialement marqués. Alors pour tout marquage  $m$  accessible, ils le sont aussi d'après la remarque précédente. Pour ce marquage  $m$ , nous définissons la relation  $t$  aide  $t'$  ssi il existe une place non marquée sortie de  $t$  et entrée de  $t'$  et la relation  $t$  précède  $t'$  comme la fermeture reflexive et transitive de *aide*. Montrons que *précède* est une relation d'ordre partiel. Si ce n'est pas le cas, alors nous avons deux transitions  $t$  et  $t'$  telles que  $t$  précède  $t'$  et  $t'$  précède  $t$ . D'après la définition de *précède*, cela signifie qu'il existe des chemins de  $t$  à  $t'$  et de  $t'$  à  $t$  où aucune place n'est marquée. En les composant, on obtient un circuit duquel on peut extraire un circuit élémentaire non marqué, ce qui est impossible. Toute relation d'ordre partiel sur un ensemble fini peut s'étendre en (au moins) une relation d'ordre total. Soit  $t_1, \dots, t_n$  la liste ordonnée des transitions. Nous affirmons que  $m[t_1 \dots t_n]$ . En effet  $t_1$  est franchissable puisque toutes ces places entrées sont marquées et si  $m[t_1 \dots t_i]m'$  alors toutes les places entrées de  $t_{i+1}$  sont marquées dans  $m'$ . Donc le réseau est vivant.  $\diamond$

Pour vérifier la vivacité, il suffit alors de supprimer les places marquées et de tester l'existence d'un circuit dans le graphe obtenu. La complexité en temps de cette recherche est proportionnelle à la taille du graphe. Remarquons par ailleurs qu'au cours de la preuve, nous avons démontré implicitement que la vivacité était équivalente à l'existence d'une séquence de franchissement à partir du marquage initial comportant exactement une occurrence de toutes les transitions. De plus cette séquence est répétitive stationnaire, car d'après la définition d'un graphe d'événements  $\sum_{t \in T} \vec{t}$  est un  $T$ -semiflot. Intéressons-nous maintenant au caractère structurellement borné.

**Proposition 56 (Graphe d'événements structurellement borné)** *Si  $R$  est un graphe d'événements, alors :*

$$R \text{ est structurellement borné} \Leftrightarrow R \text{ est fortement connexe}$$

### Preuve

Si  $R$  est fortement connexe, toutes les places sont couvertes par un circuit. Donc la somme des  $P$ -semiflots associés garantit que le réseau est conservatif donc structurellement borné.

Supposons que  $R$  ne soit pas fortement connexe. Il existe une c.f.c initiale  $\mathcal{C}$  qui possède une c.f.c successeur  $\mathcal{C}'$ . Autrement dit, il existe un noeud  $x \in \mathcal{C}$  et un noeud  $x' \in \mathcal{C}'$  tel que l'arc  $(x, x')$  appartienne à  $R$ . Si  $\mathcal{C}$  est réduite à  $x$ , alors  $x$  est une transition (puisque une place a exactement un prédécesseur) sans entrée avec au moins une sortie  $x'$ , donc  $R$  est non borné. Sinon tout noeud de

$\mathcal{C}$  appartient à un circuit élémentaire. Donc  $x$ , doté d'au moins deux sorties, est une transition et  $x'$  est une place.

Prenons le réseau restreint à  $\mathcal{C}$ . Ce sous-réseau est un graphe d'événements (puisque chaque place appartient à un circuit). Prenons un marquage initial du sous-réseau où tous les circuits sont marqués. Ce sous-réseau est alors vivant ; on peut donc franchir une séquence infinie comprenant une infinité d'occurrences de  $x$ . Cette séquence est aussi une séquence de franchissement dans le réseau initial qui accroît indéfiniment le nombre de marques dans  $x'$ . Donc  $R$  n'est pas structurellement borné.  $\diamond$

Nous terminons cette étude des graphes d'événements par la propriété pour un réseau d'être vivant et borné (dont nous avons déjà établi des conditions nécessaires pour les réseaux ordinaires).

**Proposition 57 (Graphe d'événement vivant et borné)**

*Si  $R$  est un graphe d'événements, alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1  $(R, m_0)$  est vivant et borné
- 2  $R$  est fortement connexe et tout circuit élémentaire est initialement marqué
- 3  $R$  est fortement connexe et il existe une séquence de franchissement comportant exactement une occurrence de chaque transition

**Preuve**

Nous avons déjà obtenu l'équivalence des points 2 et 3 et l'implication  $2 \Rightarrow 1$ . Pour l'implication  $1 \Rightarrow 2$ , il suffit de modifier la dernière partie de la preuve précédente, en prenant, comme marquage initial de  $\mathcal{C}$ , la restriction de  $m_0$  à cette composante.  $\diamond$

**5.4. Réseaux à choix libre**

Dans un réseau à choix libre, le jeton d'une place peut être consommé par différentes transitions. Mais dans ce cas, ces transitions ont uniquement cette place en entrée et sont toujours simultanément franchissables d'où le nom de la sous-classe (voir la figure 10). Notons que le réseau de la figure 3 est également un réseau à choix libre.

**Définition 58 (Réseau à choix libre)**  $R$ , un réseau de Petri, est un réseau à choix libre si :

$$\forall t \in T,$$

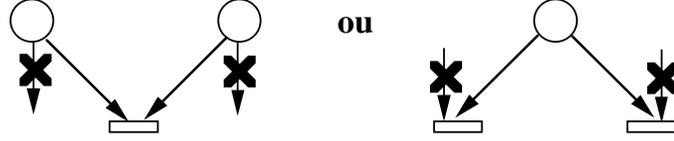


Figure 10: Contraintes des réseaux à choix à libre

- $\exists P_{in}, P_{out} \subset P$  avec  $Pré(t) = \sum_{p \in P_{in}} \vec{p}$  et  $Post(t) = \sum_{p \in P_{out}} \vec{p}$
- $\forall t' \in T, \bullet t \cap \bullet t' \neq \emptyset \Rightarrow |P_{in}| = 1$  et  $Pré(t) = Pré(t')$

Nous débutons notre étude de ces réseaux par une caractérisation de la vivacité dans les réseaux à choix libre. Pour cela, nous définissons deux propriétés d'un ensemble de places.

**Définition 59** Soit  $R$  un réseau de Petri et  $P'$  un sous-ensemble non vide de places alors :

- $P'$  est un verrou si ses entrées sont contenues dans ses sorties,  
 $\cup_{p \in P'} \bullet p \subset \cup_{p \in P'} p \bullet$
- $P'$  est une trappe si ses sorties sont contenues dans ses entrées,  
 $\cup_{p \in P'} p \bullet \subset \cup_{p \in P'} \bullet p$

Lorsqu'un verrou n'est plus marqué, il ne peut plus le redevenir et toute transition sortie du verrou devient infranchissable. Lorsqu'une trappe est marquée, elle le demeure de manière permanente. Autrement dit, un verrou non marqué est une condition suffisante de non vivacité et on peut garantir que ceci ne sera pas possible s'il contient initialement une trappe marquée. C'est le point de départ de la caractérisation de la vivacité. Pour y parvenir, nous définissons au préalable un dispositif de *vidage* de places.

Soit  $p$ , une place d'un réseau ordinaire qui n'appartient à aucune trappe du réseau. Alors, il existe une suite de sous-ensembles non vides de places,  $P_1, \dots, P_h$  (déterminés de manière unique par la construction qui suit) tels que :  $P_h = \{p\}$  et  $\forall p' \in P_i, \exists t \in p' \bullet$  t.q.  $t \bullet \subset \cup_{j < i} P_j$

La construction procède ainsi. Appelons  $Succ(p)$ , l'ensemble des places accessibles depuis  $p$  par un chemin dans le réseau ( $p$  y appartient). Puisque  $Succ(p)$  n'est pas une trappe, le sous-ensemble des places qui ont en sortie une transition sans sortie n'est pas vide. Si  $p$  fait partie de ces places, on pose  $P_0 = \{p\}$  et on s'arrête. Sinon  $P_0$  est choisi comme le sous-ensemble de ces places, et on considère le sous-ensemble  $Succ(p) \setminus P_0$ . Cet ensemble n'est pas une trappe, donc le sous-ensemble des places qui ont en sortie une transition dont toutes les sorties sont dans  $P_0$  n'est pas vide. Si  $p$  appartient à cet ensemble, on pose  $P_1 = \{p\}$  et on s'arrête, sinon  $P_1$  désigne l'ensemble de ces

places et on itère le procédé avec  $Succ(p) \setminus (P_0 \cup P_1)$ . L'ensemble des places étant fini, la procédure s'arrête nécessairement.

Pour une place de ce type, on désigne par  $h$  la hauteur de vidage de  $p$  et  $vide(p)$  la transition, sortie de  $p$ , qui a toutes ses sorties dans  $\cup_{j < h} P_j$ . Notons d'ailleurs que ces sorties n'appartiennent à aucune trappe et que leur hauteur de vidage est strictement inférieure à  $h$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'établir la caractérisation des réseaux vivants.

**Théorème 60 (Condition de Commoner [HAC 72, COM 72])**

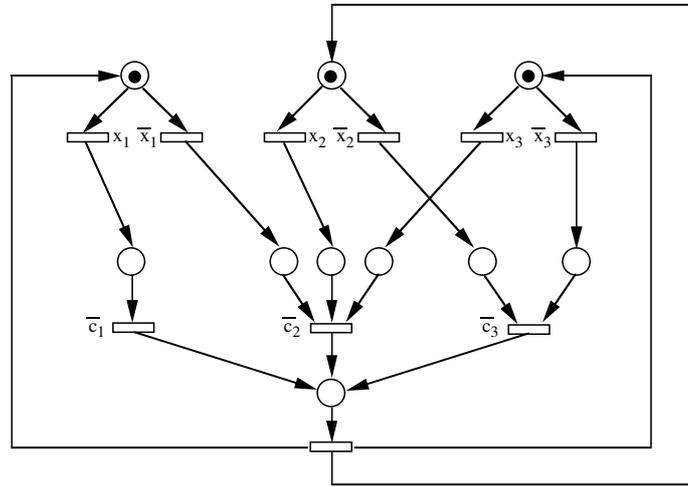
*Soit  $R$  un réseau de Petri à choix libre ; alors  $(R, m_0)$  est vivant si et seulement si tout verrou de  $R$  contient une trappe initialement marquée.*

**Exemple 16** Le réseau de la figure 3 a un verrou qui ne contient pas de trappe :  $\{A, B, AAH, BAV\}$ . Nous avons donc une nouvelle preuve qu'il ne peut être vivant quelque soit son marquage initial.

**Preuve**

Supposons que  $(R, m_0)$  soit non vivant, et soit  $t$  la transition jamais franchissable depuis un marquage accessible  $m$ . Nécessairement dans un marquage  $m'$  accessible depuis  $m$ , l'une des places entrées de  $t$ ,  $p$  sera et restera toujours non marquée. En effet, soit  $t$  a une unique entrée et la franchissabilité de  $t$  est équivalente au fait que  $p$  soit marquée, soit  $t$  a plusieurs entrées mais ne les partage pas (*choix libre*) ce qui implique que le nombre de places marquées entrées de  $t$  ne peut que croître et il suffit de prendre pour  $m'$  un marquage pour lequel cette valeur est maximale. Nous allons construire un ensemble de places non marquées à partir de  $p$ . Puisqu'à partir de  $m'$ ,  $p$  n'est plus marquée toutes ses transitions entrées ne sont plus jamais franchissables. On réitère le procédé et on obtient pour chacune des transitions une place entrée (éventuellement  $p$ ) telle que  $p$  et les nouvelles places ne sont plus jamais marquées à partir d'un marquage  $m''$ . Après un nombre fini d'itérations, le procédé de construction s'arrête lorsque les places entrées retenues sont toutes déjà présentes dans l'ensemble de places courant. Par construction, cet ensemble est non marqué dans un marquage accessible et c'est un verrou.

Supposons maintenant que  $(R, m_0)$  soit vivant et qu'il existe un verrou  $V$  ne contenant pas une trappe marquée. Nous allons exhiber une contradiction. Soit  $E$  l'ensemble des places du verrou qui n'appartiennent à aucune trappe du verrou (cet ensemble contient les places marquées du verrou). Nous appliquons notre dispositif de vidage au sous-réseau engendré par les places du verrou. Nous ordonnons les places de  $V$ , en commençant par les places de  $V \setminus E$  et en terminant par les places de  $E$  selon leur hauteur de vidage (plusieurs ordres



$$f = \text{NON } x_1 \text{ ET } (x_1 \text{ OU NON } x_2 \text{ OU NON } x_3) \text{ ET } (x_2 \text{ OU } x_3)$$

Figure 11: De la satisfaisabilité d'une formule à la non vivacité d'un réseau à choix libre

sont possibles). Ce qui dote  $\mathbb{N}^V$  de l'ordre lexicographique sur les vecteurs. Nous allons montrer qu'on peut toujours faire décroître le marquage restreint aux places du verrou **au sens lexicographique** par une séquence de franchissement. En particulier, les places de  $V \setminus E$  ne seront jamais marquées au cours du processus.

Partant de  $m_0$ , on franchit toutes les transitions possibles *vide*( $p$ ) pour  $p$  appartenant à  $E$ . Chaque franchissement retire (au moins) un jeton d'une place d'une certaine hauteur pour produire des jetons dans des places de hauteur moindre ou n'appartenant pas au verrou. Le marquage du verrou décroît donc à chaque franchissement jusqu'à atteindre  $m_1$  où aucune transition *vide*( $p$ ) n'est franchissable. Soit  $\sigma$  la plus courte séquence qui rend franchissable une transition *vide*( $p$ ) ( $m_1[\sigma]m_2$ ). Cette séquence ne peut fournir des jetons au verrou. En effet d'après la définition d'un verrou, il faudrait pour cela consommer des jetons du verrou. Or tous les jetons du verrou sont dans des places entrées de transitions *vide*( $p$ ) infranchissables donc ayant plusieurs entrées. L'hypothèse du choix libre impose alors que ces places ne soient pas entrées d'une autre transition. Le marquage restreint au verrou est inchangé au cours du franchissement de  $\sigma$ . De  $m_2$  on franchit maintenant la transition *vide*( $p$ ) devenue franchissable en décroissant le marquage du verrou et on recommence le processus. Or il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante dans  $\mathbb{N}^V$  muni de l'ordre lexicographique d'où la contradiction.  $\diamond$

A l'aide de ce théorème, il est facile d'obtenir un algorithme de test de la non-vivacité dans  $\mathcal{NP}$ . Il suffit de choisir de manière non déterministe un sous-ensemble de places, de vérifier que c'est un verrou puis de calculer en temps polynomial sa trappe maximale (union des trappes contenues dans le verrou) [MIN 90] et de s'assurer qu'elle est non marquée. A l'aide d'une réduction (relativement simple) du problème de satisfaisabilité des clauses, on prouve que le problème de la non-vivacité est  $\mathcal{NP}$ -complet [JON 77]. Nous laissons le soin au lecteur de démontrer que le réseau de la figure 11 est non vivant *ssi* la formule énoncée en bas du réseau est satisfaisable. De manière intuitive, la formule est satisfaisable si les trois négations des clauses qui la composent peuvent être rendues simultanément fausses, auquel cas on peut franchir trois transitions parmi  $\{x_1, \bar{x}_1, x_2, \bar{x}_2, x_3, \bar{x}_3\}$  sans rendre franchissable aucune des trois transitions  $\{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3\}$

Nous allons maintenant terminer cette étude en établissant une caractérisation des réseaux à choix libre vivants et bornés. Le caractère borné assure par exemple l'équivalence de certaines propriétés comportementales.

**Proposition 61** *Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri à choix libre fortement connexe et borné alors :*

$$(R, m_0) \text{ est vivant} \Leftrightarrow (R, m_0) \text{ est pseudo-vivant}$$

### Preuve

Seule l'implication de la droite vers la gauche est à démontrer. Supposons que  $R$  ne soit pas vivant ; alors il existe un marquage accessible  $m$  et une transition  $t$  tels que  $t$  ne soit jamais franchissable dans  $(R, m)$ . Soit une place  $p$  entrée de  $t$  ; le marquage de  $p$  ne peut décroître car si  $p$  est entrée d'une autre transition alors ces transitions sont elles aussi à jamais infranchissables. Nécessairement, les transitions entrées de  $p$  ne peuvent apparaître qu'un nombre borné de fois dans une séquence (sinon  $p$  ne serait pas bornée). A partir de  $m$ , il est donc possible d'atteindre un marquage  $m'$  où toutes ces transitions sont à jamais infranchissables. En itérant ce procédé, on obtient un marquage où toutes les transitions pour lesquels un chemin conduit à  $t$  sont à jamais infranchissables. Puisque  $R$  est fortement connexe, cet ensemble de transitions est  $T$  lui-même et ce marquage est un marquage mort.  $\diamond$

La condition nécessaire de vivacité et du caractère borné sur le rang de  $C$  dans les réseaux quelconques peut aussi être précisée pour les réseaux à choix libre.

**Proposition 62** *Soit  $R$  un réseau de Petri à choix libre, alors :*

$$(R, m_0) \text{ est vivant et borné} \Rightarrow \text{rang}(C) = |\Theta| - 1$$

**Preuve**

Nous allons raisonner sur le réseau vivant et borné  $(R', m'_0)$  de la proposition 50 obtenu après avoir superposé à  $(R, m_0)$  un circuit pour chaque classe d'équivalence de  $\Theta$  non réduite à un élément. Pour ce réseau, nous savons déjà que  $\text{rang}(C') \leq |T| - 1$  et plus précisément qu'il existe un  $T$ -semiflot  $v$  tel que  $\|v\| = T$  (proposition 33). Pour obtenir la proposition, il nous faut montrer que l'inégalité est en réalité une égalité. Si l'inégalité est stricte, il existe un deuxième  $T$ -flot  $v'$  (avec  $v, v'$  linéairement indépendants) dont on peut supposer qu'au moins une composante est strictement positive. Soit parmi ces transitions,  $t_0$  la transition qui vérifie :  $\frac{v'(t_0)}{v(t_0)} = \text{Max}(\{\frac{v'(t')}{v(t')}/t' \in T', v'(t') > 0\})$ . Alors  $v'' = v'(t_0).v - v(t_0).v'$  est un  $T$ -semiflot de support **strictement inclus** dans  $T$ .

Soit  $t$  une transition appartenant au support d'un  $T$ -semiflot de  $R'$ . En raison de l'ajout des circuits, toute transition de la classe d'équivalence de  $t'$  appartient aussi au support du  $T$ -semiflot. En effet si cette classe n'est pas réduite à  $t$ , alors  $t$  produit un jeton dans une place du circuit consommée uniquement par la transition suivante du circuit qui doit donc apparaître dans le support du  $T$ -semiflot. Par itération, toutes les transitions de ce circuit y apparaissent.

Nous savons d'autre part que  $(R, m_0)$  est vivant et borné donc que  $R$  est fortement connexe. Soit  $t$  une transition du support de  $v''$ ,  $t'$  une transition quelconque et soit un chemin dans  $R$  de  $t$  à  $t'$ . Nous allons montrer que toutes les transitions sur le chemin appartiennent au support de  $v''$ .  $t$  y appartient par hypothèse. Soit  $t_1 \neq t'$  une transition du chemin qui appartient au support, soit  $p$  la place qui suit sur le chemin et  $t_2$  la transition suivante. L'une des transitions  $t_3$  sortie de  $p$  doit appartenir au support de  $v''$  donc toutes les transitions de la même classe d'équivalence doivent y appartenir et parmi elles  $t_2$  (*c'est uniquement ici qu'intervient l'hypothèse du choix libre*). Donc  $t'$  quelconque appartient au support de  $v''$  ce qui contredit le fait que le support de  $v''$  ne doit pas contenir toutes les transitions.  $\diamond$

Nous allons établir une autre condition nécessaire du caractère borné et vivant d'un réseau à choix libre à partir de la caractérisation de la vivacité. Nous avons besoin pour cela d'introduire la notion de sous-réseau et de couverture de réseau.

**Définition 63** Soit  $(R, m_0)$  un réseau de Petri,

- soit  $P'$  un sous-ensemble de places ; alors  $(R[P'], m_0[P'])$  est le sous-réseau défini par le sous-ensemble de places  $P'$ , le sous-ensemble de transitions  $\bullet P' \cup P' \bullet$  et la matrice d'incidence et le marquage initial de  $(R, m_0)$  restreints à ces sous-ensembles.
- $R$  est couvert par des machines à états marquées si toute place appartient

à un sous-ensemble  $P'$  tel que  $(R[P'], m_0[P'])$  soit une machine à états marquée.

On dira qu'un verrou est *minimal* s'il ne contient pas de verrou strictement plus petit.

**Lemme 64 (Caractérisation d'un verrou minimal)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau à choix libre et soit  $V$  un verrou alors :

$$V \text{ est minimal} \Leftrightarrow$$

$\forall p, p' \in V \exists$  un chemin de  $p$  à  $p'$  dans  $R[V]$  et  $\forall t$  transition de  $R[V]$ ,  $|\bullet t| = 1$

**Preuve**

Soit  $V$  un verrou minimal et soit  $\mathcal{C}$  une c.f.c. initiale de  $R[V]$ ;  $\mathcal{C}$  n'est pas réduite à une transition sinon  $V$  ne serait pas un verrou. Par construction, les places de  $\mathcal{C}$  constituent un verrou donc cet ensemble est  $V$  lui-même ce qui établit la première condition. Supposons maintenant que  $t$  une transition de  $R[V]$  ait deux entrées. Ces deux places ne sont entrées que de cette transition et en supprimant n'importe laquelle d'entre elles on obtient un nouveau verrou.  $t$  a évidemment une entrée car  $V$  est un verrou.

Supposons qu'un verrou  $V$  vérifie le membre droit de l'équivalence et ne soit pas minimal. Appelons  $V'$  le verrou strictement inclus dans  $V$ ,  $p$  une place de  $V \setminus V'$  et  $p'$  une place de  $V'$ . Il existe un chemin dans  $R[V]$  de  $p$  à  $p'$ . Soit  $p''$  la dernière place appartenant à  $V \setminus V'$  sur ce chemin, la transition qui suit  $p''$  est une entrée de  $V'$  et sa seule entrée dans  $V$  ( $p''$ ) n'appartient pas à  $V'$ . Donc  $V'$  n'est pas un verrou.  $\diamond$

**Lemme 65 (Verrou minimal d'un réseau vivant et borné)** Soit  $(R, m_0)$  un réseau à choix libre vivant et borné et soit  $V$  un verrou minimal alors :

$$R[V] \text{ est une machine à états marquée}$$

**Preuve**

Puisque le réseau est vivant,  $V$  contient une trappe marquée  $Tr$ . Supposons que  $Tr$  soit différente de  $V$ , alors puisque  $Tr$  ne peut être un verrou, il existe une transition  $t$  de  $R[Tr]$  qui n'a pas d'entrée. Examinons la somme des marques des places de  $Tr$ , cette somme ne peut décroître car toute transition de  $R[Tr]$  a au moins une sortie et au plus une entrée. De plus à chaque franchissement de  $t$ , cette somme s'accroît. Puisque  $(R, m_0)$  est vivant, on peut construire une séquence infinie comportant une infinité d'occurrences de  $t$  contredisant le caractère borné du réseau. Donc  $Tr = V$ ,  $V$  est marqué et chaque transition de  $R[V]$  a au moins une sortie et exactement une entrée. A l'aide du même raisonnement qu'avec la trappe, on établit qu'aucune transition ne peut avoir deux sorties et donc que  $R[V]$  est une machine à états.  $\diamond$

**Lemme 66 (Verrou minimal d'un réseau fortement connexe)** *Soit  $R$  un réseau à choix libre fortement connexe et soit  $p$  une place de  $P$  alors :*  
 *$p$  est contenu dans un verrou minimal*

**Preuve**

Soit  $p$  une place ; si  $P = \{p\}$  le résultat est évident. Dans le cas contraire, soit  $t \in \bullet p$ . Cet ensemble est non vide car le réseau est fortement connexe. Il existe un chemin élémentaire de  $p$  à  $t$ . Nous allons construire le verrou minimal à partir des places du circuit ainsi obtenu. Nous appellerons le sous-ensemble de places courant  $P'$ .  $R'$  sera le réseau restreint à  $P'$  et  $P'\bullet$ .  $P'$  vérifiera à chaque étape les conditions de minimalité d'un verrou (sans être lui-même nécessairement un verrou). Initialement, le circuit assure la forte connexité entre les places. De plus, aucune transition ne peut avoir deux places du circuit en entrée puisqu'elles sont déjà entrées de transitions différentes. Supposons que le sous-ensemble courant ne soit pas un verrou de  $R$ . Alors il existe une transition  $t' \in \bullet P' \setminus P'\bullet$ . Soit  $p' \in \bullet t'$  ; puisque le réseau est fortement connexe, il existe un chemin élémentaire d'un noeud quelconque de  $R'$  à  $p'$ . En choisissant un chemin **de longueur minimale**, tous les noeuds excepté le premier n'appartiennent pas à  $R'$  et aucune des places du chemin ne partage ses sorties ni avec les autres places du chemin ni avec les places de  $P'$ .  $P'$  est mis à jour avec ces nouvelles places et on itère le procédé qui doit se terminer puisque  $T$  est fini. Par construction, le sous-ensemble  $P'$  ainsi obtenu est un verrou minimal.  $\diamond$

**Proposition 67** *Soit  $R$  un réseau de Petri à choix libre, alors :*

$$(R, m_0) \text{ est vivant et borné} \Rightarrow \\ (R, m_0) \text{ est couvert par des machines à états marquées}$$

**Preuve**

D'après la proposition 45 le réseau est fortement connexe. En vertu du lemme précédent, toute place  $p$  appartient à un verrou minimal. Ce verrou est une machine à états marquée d'après le lemme 65.  $\diamond$

Il s'avère que la conjonction des conditions nécessaires précédemment établies est une condition nécessaire et suffisante conduisant au théorème fondamental sur le comportement des réseaux à choix libre appelé le théorème du rang.

**Théorème 68 (Théorème du rang [ESP 92])** *Soit  $R$  un réseau de Petri à choix libre ; alors  $(R, m_0)$  est vivant et borné si et seulement si les conditions suivantes sont réunies :*

- $R$  est fortement connexe
- $R$  est couvert par des machines à états

- $\text{rang}(C) = |\Theta| - 1$
- *Tout verrou de  $R$  est initialement marqué*

### Preuve

Au vu des résultats de cette section, il ne nous reste plus qu'à établir la condition suffisante. Puisque le réseau est couvert par des machines à états, il est conservatif donc structurellement borné.

Soit  $m_1$  un marquage qui marque chaque trappe du réseau ; nous allons montrer par l'absurde que  $(R, m_1)$  est vivant. D'après la proposition 61 si  $(R, m_1)$  n'est pas vivant alors  $(R, m_1)$  n'est pas pseudo-vivant. Soit  $m_2$  un marquage mort ; chaque classe d'équivalence de  $\Theta$  a (au moins) une place entrée non marquée dans  $m_2$ . Nous choisissons une telle place par classe et nous appelons  $P'$ , ce sous-ensemble de places.

Puisque  $|P'| = |\Theta|$  et  $\text{rang}(C) < |\Theta|$ , il existe un flot  $v$  de support inclus dans  $P'$ . Posons  $v = v_1 + v_2$  où  $v_1$  est constitué des coefficients positifs de  $v$  et  $v_2 = v - v_1$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $v_1 \neq \vec{0}$ . D'après le choix de  $P'$ , une transition  $t$  admet une unique entrée dans  $P'$ . Si cette entrée n'est pas dans  $\|v_1\|$  alors  $v_1^t.C(t) \geq 0$ . Sinon cette entrée n'est pas dans  $\|v_2\|$ , mais alors  $v_1^t.C(t) = -v_2^t.C(t) \geq 0$ . En conclusion,  $v_1^t.C \geq \vec{0}$ . Mais ceci n'est possible que si  $\|v_1\|$  est une trappe. Or toutes les trappes sont marquées ce qui est contradictoire.

Puisque  $(R, m_1)$  est borné et vivant, tout verrou minimal de  $R$  est une trappe (lemme 65). Puisque dans  $(R, m_0)$  tout verrou est marqué, tout verrou contient une trappe marquée (i.e. l'un de ses verrous minimaux). D'après la condition de Commoner,  $(R, m_0)$  est vivant.  $\diamond$

Ce résultat est remarquable à double titre. D'une part, il ne repose que sur la structure du graphe, la matrice d'incidence et le marquage initial. D'autre part, on en déduit un algorithme de vérification qui opère en temps polynomial. La forte connexité se vérifie avec l'algorithme de Tarjan. Le rang de la matrice se calcule avec une variante de l'élimination de Gauss. Pour tester la couverture par les machines à états, il suffit de construire un verrou minimal contenant chaque place en suivant la preuve du lemme 66 et s'assurer qu'on obtient une machine à états. Enfin pour vérifier l'inexistence d'un verrou non marqué, on se restreint aux places non marquées et on teste l'inexistence du verrou maximal (union de tous les verrous).

De nombreux travaux ont porté sur la généralisation des caractérisations à des extensions de réseaux à choix libre [GRI 80, TER 93, TER 94, BAR 95]. De même, d'autres propriétés comportementales des réseaux à choix libre ont été analysées [LEE 95, ESP 98]. Le lecteur particulièrement intéressé par cette classe pourra se référer à un ouvrage qui lui est consacré [DES 95].

## Références

- [AHO 74] ALFRED V. AHO, JOHN E. HOPCROFT ET J. D. ULLMAN. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley, Reading, 1974.
- [BAR 95] K. BARKAOUI, J. M. COUVREUR ET C. DUTHELLET. On liveness in extended non self-controlling nets. In *Proceeding of the 16<sup>th</sup> International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, volume 935 of *LNCS*, pages 25–44, Turin, Juin 1995.
- [BER 83] G. BERTHELOT. Transformations et analyse de reseaux de Petri. application aux protocoles. Thèse d'Etat de l'Université P. et M. Curie Paris, 1983.
- [BER 87] G. BERTHELOT. Transformations and decompositions of nets. In W. BRAUER, W. REISIG ET G. ROZENBERG, eds, *Advances in Petri Nets '86 - Part I*, volume 254 of *LNCS*, pages 359–376. Springer Verlag, Bad Honnef, Allemagne, Février 1987.
- [COL 86] J. M. COLOM, J. MARTINEZ ET M. SILVA. Packages for validating discrete production systems modeled with Petri nets. In *Proc. of the IMACS-IFAC Symp. Modelling and Simulation for Control of Lumped and Distributed Parameter Systems, Lille*, pages 457–462, 1986.
- [COL 91] J. M. COLOM ET M. SILVA. Convex geometry and semiflows in P/T nets. A comparative study of algorithms for computation of minimal P-semiflows. *Lecture Notes in Computer Science ; Advances in Petri Nets 1990*, 483 :79–112, 1991.
- [COM 71] F. COMMONER, A. HOLT, S. EVEN ET A. PNUELI. Marked directed graphs. *Journal of Computer and System Sciences*, 5(5) :511–523, Octobre 1971.
- [COM 72] F. COMMONER. Deadlocks in Petri nets. Rapport technique CA-7206-2311, Applied Data Research Inc., Wakefield, Massachusetts, 1972.
- [DES 95] J. DESEL ET ESPARZA J. *Free-choice Petri Nets*, volume 40 of *Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science*. Cambridge University Press, 1995.
- [ESP 92] J. ESPARZA ET M. SILVA. A polynomial-time algorithm to decide liveness of bounded free choice nets. *Theoretical Computer Science*, 102 :185–205, 1992.
- [ESP 98] J. ESPARZA. Reachability in live and safe free-choice Petri nets is NP-complete. *Theoretical Computer Science*, 198(1-2) :211–224, 1998.
- [EVE 79] S. EVEN. *Graph Algorithms*. Computer Science Press, Rockville, 1979.
- [GRI 80] W. GRIESE. Liveness in NSC-Petri nets. *Discrete Structures and Algorithms*, pages 255–264, 1980.
- [HAC 72] M. HACK. Analysis of production schemata by Petri nets. Master's thesis, M.I.T., Cambridge, MA, 1972. publié comme rapport de recherche MAC TR-94. Corrigé en 1974.
- [HAD 87] S. HADDAD. Une catégorie régulière de réseau de Petri de haut niveau : définition, propriétés et réductions. application à la validation de systèmes distribués. Thèse de l'Université P. et M. Curie Paris, Chapitre IV, 1987.
- [JAN 86] M. JANTZEN. Complexity of place/transition nets. In W. BRAUER, W. REISIG ET G. ROZENBERG, eds, *Advances in Petri Nets '86 - Part I*, volume 254 of *LNCS*, pages 413–435. Springer Verlag, Bad Honnef, Allemagne, February 1986.
- [JON 77] N.D. JONES, L.H. LANDWEBER ET LIEN Y.E. Complexity of some problems in Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 4 :277–299, 1977.

- [LEE 95] D-I. LEE, S. KUMAGAI ET KODAMA S. Handles and reachability analysis of free choice nets. In *Application and Theory of Petri Nets 1995, Proc. 16<sup>th</sup> Intern. Conference*, volume 935 of *LNCS*, pages 298–315, Turin, Italie, June 1995. Springer Verlag.
- [MIN 90] M. MINOUX ET K. BARKAOUI. Deadlocks and traps in Petri nets as Horn-satisfiability solutions and some related polynomially solvable problems. *Discrete Mathematics*, 29 :195–210, 1990.
- [SCH 00] P. SCHNOEBELEN ET N. SIDOROVA. Bisimulation and the reduction of Petri nets. In *Lecture Notes in Computer Science; Application and Theory of Petri Nets 2000, Proceedings 21<sup>st</sup> International Conference*, volume 1825 of *LNCS*, pages 409–423, Aarhus, Danemark, Juin 2000. Springer Verlag.
- [TER 93] E. TERUEL ET M. SILVA. Liveness and home states in equal conflict systems. In *Application and Theory of Petri Nets 1992, Proc. 14<sup>th</sup> Intern. Conference, Chicago, USA*, volume 691 of *LNCS*, Chicago, USA, Juin 1993. Springer Verlag.
- [TER 94] E. TERUEL ET M. SILVA. Well-formedness of equal conflict systems. In *Lecture Notes in Computer Science; Application and Theory of Petri Nets 1994, Proceedings 15<sup>th</sup> International Conference, Zaragoza, Spain*, volume 815 of *LNCS*, pages 491–510, Zaragossa, Espagne, Juin 1994. Springer Verlag.