Jeux sur un graphe

Serge Haddad

LMF, ENS Paris-Saclay

Présentation à l'Union des professeurs de classes préparatoires scientifiques,

10 juin 2022, pour approfondir :

`https://www.react.uni-saarland.de/teaching/infinite-games-16/lecture-notes.pdf`

Plan

Specification et problèmes

Jeux d'accessibilité

Jeux d'accessibilité répétée

Détermination des jeux

Jeux de parité

Jeux séquentiels

Syntaxe : $G = (V, E)$

Un ensemble d'états $V = V_0 \uplus V_1$ dont un état initial v_0.

Un ensemble de transitions $E \subseteq V \times V$
tel que pour tout $v \in V$, il existe $(v, v') \in E$.

Deux joueurs 0 et 1.

Une condition de gain $Win \subseteq V^\omega$

Sémantique

Etant donné l'état initial v_0, le jeu se déroule ainsi :

Soit $v_n \in V_\mathrm{P}$, le joueur P choisit v_{n+1} tel que $(v_n, v_{n+1}) \in E$.

La partie est donc une suite *infinie* d'états $\rho = v_0 v_1 \dots$

Si $\rho \in Win$ alors le joueur 0 gagne sinon le joueur 1 gagne.

Jeux sur un graphe

Lorsque V est fini alors G est un graphe.

Quelles conditions de gain ?

Accessibilité : un sous-ensemble d'états $Acc \subseteq V$.

Soit $\rho = v_0 v_1 \dots$ une partie, $Occ(\rho) = \{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ρ est gagnante pour le joueur 0 si $Occ(\rho) \cap Acc \neq \emptyset$.

Accessibilité répétée : un sous-ensemble d'états $Acc \subseteq V$.

Soit ρ une partie, $OccInf(\rho) = \{v \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n\ v_m = v\}$.

ρ est gagnante pour le joueur 0 si $OccInf(\rho) \cap Acc \neq \emptyset$.

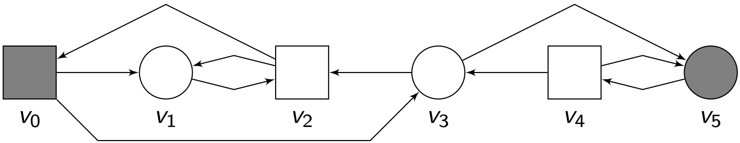
Parité : une fonction de *priorité* π de V dans $\mathbb{N}$.

Soit ρ une partie, $Pri(\rho) = \max(p \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m > n\ \pi(v_m) = p)$.

ρ est gagnante pour le joueur 0 si $Pri(\rho)$ est paire.

Illustration : Accessibilité

$$V_0 = \{v_1, v_3, v_5\},\ V_1 = \{v_0, v_2, v_4\},\ Acc = \{v_0, v_5\}$$



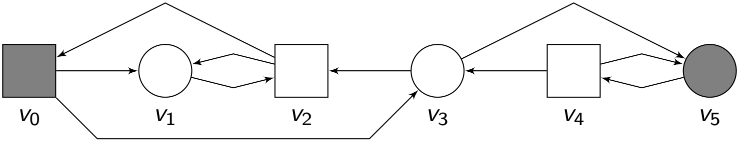
Le joueur 0 gagne si le jeu démarre en :

- v_0 ou v_5 ;
- v_3 ;
- v_4 ;

Le joueur 1 gagne si le jeu démarre en v_1 ou v_2.

Illustration : Accessibilité répétée

$$V_0 = \{v_1, v_3, v_5\},\ V_1 = \{v_0, v_2, v_4\},\ Acc = \{v_0, v_5\}$$



Le joueur 0 peut atteindre Acc si le jeu démarre en $\{v_0, v_3, v_4, v_5\}$.

Mais

- De v_0 le joueur 0 ne peut atteindre à nouveau Acc ;
- De v_5 le joueur 0 peut atteindre à nouveau Acc.

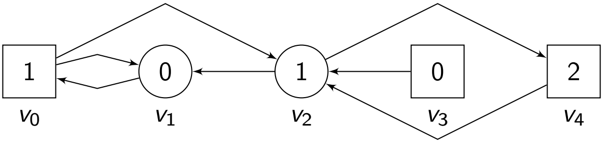
Le joueur 0 peut atteindre $\{v_5\}$ si le jeu démarre en $\{v_3, v_4, v_5\}$

et gagner le jeu d'accessibilité répétée.

Illustration : Parité

$$V_0 = \{v_1, v_2\},\ V_1 = \{v_0, v_3, v_4\}$$

$$\pi(v_0) = 1,\ \pi(v_1) = 0,\ \pi(v_2) = 1,\ \pi(v_3) = 0,\ \pi(v_4) = 2$$



Par examen,

- Le joueur 0 gagne à partir de v_2, v_3, v_4 ;
- Le joueur 1 gagne à partir de v_0, v_1.

Stratégies

Une *stratégie* σ du joueur P est une fonction de $V^* V_\mathrm{P}$ dans V telle que :

$$\forall \rho = v_0 v_1 \ldots v_n \in V^* V_\mathrm{P} \qquad (v_n, \sigma(\rho)) \in E$$

Une stratégie σ est *sans mémoire* si :

$$\forall \rho = v_0 w v_n, \rho' = v_0 w' v_n \in V^* V_\mathrm{P} \qquad \sigma(\rho) = \sigma(\rho')$$

Une partie $\rho = v_0 v_1 \ldots$ est *conforme* à σ si :

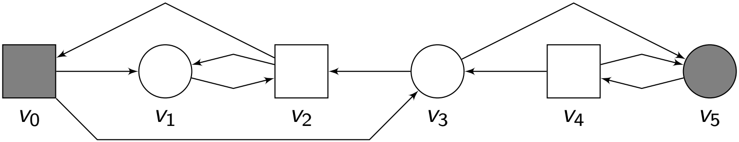
$$\forall v_n \in V_\mathrm{P} \qquad v_{n+1} = \sigma(v_0 v_1 \ldots v_n)$$

Une stratégie σ du joueur P est *gagnante* pour v_0
si pour tout ρ conforme à σ démarrant en v_0 :

- $\mathrm{P} = 0$ et $\rho \in \mathit{Win}$;
- $\mathrm{P} = 1$ et $\rho \notin \mathit{Win}$.

Illustration : Accessibilité

$$V_0 = \{v_1, v_3, v_5\},\ V_1 = \{v_0, v_2, v_4\},\ Acc = \{v_0, v_5\}$$



Soit σ_0 une stratégie sans mémoire pour le joueur 0 définie par :

$$\sigma_0(v_1) = v_2, \sigma_0(v_3) = v_5, \sigma_0(v_5) = v_4$$

σ_0 est gagnante en démarrant en $\{v_0, v_3, v_4, v_5\}$.

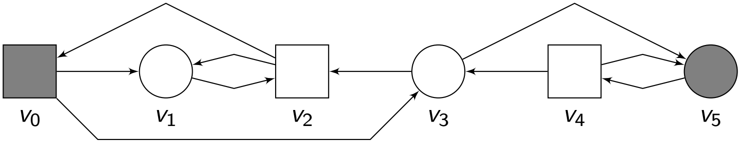
Soit σ_1 une stratégie sans mémoire pour le joueur 1 définie par :

$$\sigma_1(v_0) = v_1, \sigma_1(v_2) = v_1, \sigma_1(v_4) = v_3$$

σ_1 est gagnante en démarrant en $\{v_1, v_2\}$.

Illustration : Accessibilité répétée

$$V_0 = \{v_1, v_3, v_5\},\ V_1 = \{v_0, v_2, v_4\},\ Acc = \{v_0, v_5\}$$



Soit σ_0 une stratégie sans mémoire pour le joueur 0 définie par :

$$\sigma_0(v_1) = v_2, \sigma_0(v_3) = v_5, \sigma_0(v_5) = v_4$$

σ_0 est gagnante en démarrant en $\{v_3, v_4, v_5\}$.

Soit σ_1 une stratégie sans mémoire pour le joueur 1 définie par :

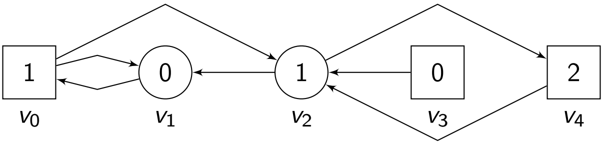
$$\sigma_1(v_0) = v_1, \sigma_1(v_2) = v_1, \sigma_1(v_4) = v_3$$

σ_1 est gagnante en démarrant en $\{v_0, v_1, v_2\}$.

Illustration : Parité

$$V_0 = \{v_1, v_2\},\ V_1 = \{v_0, v_3, v_4\}$$

$$\pi(v_0) = 1,\ \pi(v_1) = 0,\ \pi(v_2) = 1,\ \pi(v_3) = 0,\ \pi(v_4) = 2$$



Soit σ_0 une stratégie sans mémoire pour le joueur 0 définie par :

$$\sigma_0(v_1) = v_0, \sigma_0(v_2) = v_4$$

σ_0 est gagnante en démarrant en $\{v_2, v_3, v_4\}$.

Soit σ_1 une stratégie sans mémoire pour le joueur 1 définie par :

$$\sigma_1(v_0) = v_1, \sigma_1(v_3) = v_2, \sigma_1(v_4) = v_2$$

σ_1 est gagnante en démarrant en $\{v_0, v_1\}$.

Quelques problèmes

Un jeu est *déterminé* si pour tout état initial v_0,

il existe une stratégie gagnante pour l'un des joueurs.

$\boxed{\text{Quels jeux sont déterminés ?}}$

$\boxed{\text{Quels jeux déterminés admettent des stratégies gagnantes sans mémoire ?}}$

$\boxed{\text{Quelle est la complexité du calcul d'une stratégie gagnante ?}}$

Plan

Calcul des sommets gagnants

Win(G, Acc)

$Att \leftarrow Acc$; $OldAtt \leftarrow \emptyset$
While $Att \neq OldAtt$ **do**
  $OldAtt \leftarrow Att$
  For $v \in V_0 \setminus OldAtt$ **do**
    De v, peut-on atteindre en un pas $OldAtt$?
    If $\exists\ (v, v') \in E \wedge v' \in OldAtt$ **then** $Att \leftarrow Att \cup \{v\}$; $\sigma_0(v) \leftarrow v'$
  For $v \in V_1 \setminus OldAtt$ **do**
    De v, doit-on atteindre en un pas $OldAtt$?
    If $\forall\ (v, v') \in E\ v' \in OldAtt$ **then** $Att \leftarrow Att \cup \{v\}$
For $v \in V_1 \setminus Att$ **do**
  Let $(v, v') \in E\ \wedge v' \notin Att$ **then** $\sigma_1(v) \leftarrow v'$

Paradigme algorithmique. Calcul d'un plus petit point fixe :

$$\mathrm{Win}(G, Acc) = \mu Att\ Acc \vee (V_0 \wedge \mathrm{EX}Att) \vee (V_1 \wedge \mathrm{AX}Att)$$

Correction et complexité

Complexité.

Au plus $|V|$ itérations de la boucle externe.

Une itération nécessite l'examen d'au plus $|V|$ sommets et d'au plus $|E|$ arcs.

D'où une complexité en $O(|V|(|V| + |E|))$ mais ...

avec une structure de données appropriée, la complexité est réduite à $O(|V| + |E|)$.

Correction.

Par induction σ_0 garantit que tout sommet inséré dans Att atteint Acc.

Att est appelé *l'attracteur* de Acc pour le joueur 0.

Pour tout $v \in V_0 \setminus Att$ et $(v, v') \in E$, $v' \in V \setminus Att$

Pour tout $v \in V_1 \setminus Att$, $(v, \sigma_1(v)) \in E$ et $\sigma_1(v) \in V \setminus Att$

$V \setminus Att$ est appelé *une trappe* pour le joueur 0.

Plan

Specification et problèmes

Jeux d'accessibilité

Jeux d'accessibilité répétée

Détermination des jeux

Jeux de parité

Calcul des états gagnants

InfWin(G, Acc)

$W \leftarrow Acc$; $OldW \leftarrow V$

While $W \neq OldW$ **do**

  $OldW \leftarrow W$; $InfR \leftarrow \mathrm{Acc}(G, W)$

  For $v \in V_0 \cap W$ **do**

    De v, peut-on atteindre $OldW$?

    If $\forall\ (v, v') \in E\ \ v' \notin InfR$ **then** $W \leftarrow W \setminus \{v\}$

  For $v \in V_1 \cap W$ **do**

    De v, doit-on atteindre $OldW$?

    If $\exists\ (v, v') \in E \wedge v' \notin InfR$ **then** $W \leftarrow W \setminus \{v\}$

For $v \in V_0 \cap W$ **do**

  Let $(v, v') \in E\ \wedge v' \in InfR$ **then** $\sigma_0(v) \leftarrow v'$

Paradigme algorithmique. Calcul d'un plus grand point fixe :

$$\mathrm{InfAcc}(G, Acc) \cap Acc = \nu W\ Acc \wedge [(V_0 \wedge \mathrm{EX}\ \mathrm{Acc}(G, W)) \vee (V_1 \wedge \mathrm{AX}\ \mathrm{Acc}(G, W))]$$

Correction et complexité

Complexité.

Au plus $|V|$ itérations de la boucle externe.

Une itération entraine la résolution d'un jeu d'accessibilité.

D'où une complexité en $O(|V|(|V| + |E|))$.

Correction.

Par induction après i itérations,

W est l'ensemble des sommets de Acc qui peuvent atteindre Acc, i fois.

Donc W contient l'ensemble des sommets de Acc

qui peuvent atteindre infiniment souvent Acc.

En sortie de la boucle externe,

de tout sommet de W on peut atteindre un sommet de W.

Donc tous les sommets qui peuvent atteindre W

peuvent atteindre infiniment souvent Acc.

Plan

Interlude

Soit la relation d'équivalence $\sim$ définie sur $\{0,1\}^\omega$ par :

$$w \sim w' \text{ si } w \text{ et } w' \text{ diffèrent sur un nombre fini de bits.}$$

On choisit un représentant par classe d'équivalence

et on note $\widehat{w}$ le représentant tel que $w \sim \widehat{w}$.

On définit $\oplus$ de $\{0,1\}^\omega$ dans $\{0,1\}$ par :

$$\oplus(w) = 1 \text{ ssi le nombre de bits différents de } w \text{ et } \widehat{w} \text{ est impair.}$$

Observation. Si w et w' diffèrent d'un bit alors $\oplus(w) \neq \oplus(w')$.

Un jeu non déterminé

- 0 et 1 jouent à tour de rôle.
- A chaque tour, le joueur écrit une séquence finie non vide de bits.
- La séquence infinie w obtenue par concaténation

  doit satisfaire la condition de gain définie par $\oplus(w) = 1$.

Formellement, soit $G = (V, E)$ et Win définis par :

- $V_0 = \{0\} \times \{0,1\}^*$ et $V_1 = \{1\} \times \{0,1\}^*$;
- $E = \{((\mathsf{P}, w), (1 - \mathsf{P}, w')) \mid \mathsf{P} \in \{0,1\} \wedge w \in \{0,1\}^* \wedge w' \in \{0,1\}^+\}$;
- $Win = \{(\mathsf{P}_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \oplus(\prod_{n\in\mathbb{N}} w_n) = 1\}$.

Considérons l'état initial $(0, \varepsilon)$.

1 n'a pas de stratégie gagnante

Soit σ_1 une stratégie de 1.

On construit inductivement $\rho = v_0 v_1 \dots$ et $\rho' = v'_0 v'_1 \dots$ conformes à σ_1.

Etape initiale.

Soit $v_0 = (0, \varepsilon)$. Alors $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (0, w_1)$ où w_1 est déterminé par σ_1.

Soit $v'_0 = (0, \varepsilon)$. Alors $v'_1 = (1, 1w_1)$ et $v'_2 = (0, w_2)$ où w_2 est déterminé par σ_1.

Soit $v_0 v_1 v_2 = (0, \varepsilon)(1, 0)(0, w_1)$.
Alors $v_3 = (1, w_2)$ et $v_4 = (0, w_3)$ où w_3 est déterminé par σ_1.

Etape inductive. Soit $n > 0$.

Soit $v_0 v_1 \dots v_{2n} = (0, \varepsilon)(1, 0)(0, w_1) \dots (0, w_{2n-1})$.
Alors $v_{2n+1} = (1, w_{2n})$ et $v_{2n+2} = (0, w_{2n+1})$ où w_{2n+1} est déterminé par σ_1.

Soit $v'_0 v'_1 \dots v'_{2n} = (0, \varepsilon)(1, 1w_1)(0, w_2) \dots (0, w_{2n})$.
Alors $v'_{2n+1} = (1, w_{2n+1})$ et $v'_{2n+2} = (0, w_{2n+2})$ où w_{2n+2} est déterminé par σ_1.

Or les séquences infinies associées à ρ (i.e., $0(w_n)_{n>0}$)
et ρ' (i.e., $1(w_n)_{n>0}$) ne diffèrent que par un bit.

Donc σ_1 n'est pas une stratégie gagnante.

0 n'a pas de stratégie gagnante

Soit σ_0 une stratégie de 0.

On construit inductivement $\rho = v_0 v_1 \dots$ et $\rho' = v'_0 v'_1 \dots$ conformes à σ_0.

Etape initiale.

Soit $v_0 = (0, \varepsilon)$. Alors $v_1 = (1, w_1)$, $v_2 = (0, 0)$ et $v_3 = (1, w_2)$
où w_1 et w_2 sont déterminés par σ_0.

Soit $v'_0 = (0, \varepsilon)$. Alors $v'_1 = (1, w_1)$, $v'_2 = (0, 1w_2)$ et $v'_3 = (1, w_3)$
où w_1 et w_3 sont déterminés par σ_0.

Etape inductive. Soit $n > 1$.

Soit $v_0 v_1 \dots v_{2n-1} = (0, \varepsilon)(1, w_1)(0, 0) \dots (1, w_{2n-2})$.
Alors $v_{2n} = (0, w_{2n-1})$ et $v_{2n+1} = (1, w_{2n})$ où w_{2n} est déterminé par σ_0.

Soit $v'_0 v'_1 \dots v'_{2n-1} = (0, \varepsilon)(1, w_1)(0, 1w_2) \dots (1, w_{2n-2})$.
Alors $v_{2n} = (0, w_{2n})$ et $v_{2n+1} = (1, w_{2n+1})$ où w_{2n+1} est déterminé par σ_0.

Or les séquences infinies associées à ρ (i.e., $w_1 0 (w_n)_{n>1}$)
et ρ' (i.e., $w_1 1 (w_n)_{n>1}$) ne diffèrent que par un bit.

Donc σ_0 n'est pas une stratégie gagnante.

Jeux déterminés

Théorème de Martin

Les jeux dont la condition de gain est un ensemble borélien sont déterminés.

D. Martin, Borel determinacy, Ann. Math. 102 (1975) 363-371

Théorème de Emerson et Jutla, Mostowski

Les jeux de parité admettent des stratégies gagnantes sans mémoire.

A.E. Emerson, C.S. Jutla, Tree automata, mu-calculus and determinacy, in Proc. 32th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, 1991, pp. 368-377.

A.W. Mostowski, Games with forbidden positions, Technical Report 78, Uniwersytet Gdsuiski, Instytut Matematyki, 1991.

Plan

Préliminaires et objectif

Soit p un entier, on note $\hat{p} = p\%2$. $\hat{p}$ est donc aussi un joueur.

Notations. Soit (G, π) un jeu de parité et P un joueur.

- $\mathrm{W}_{\mathrm{P}}(G, \pi)$ est l'ensemble des sommets pour lesquels
- P a une stratégie gagnante notée $\sigma_{\mathrm{P}}(G, \pi)$

Théorème. [1]

Pour tout jeu de parité (G, π)

- $V = \mathrm{W}_0(G, \pi) \uplus \mathrm{W}_1(G, \pi)$
- Pour tout P, $\sigma_{\mathrm{P}}(G, \pi)$ est sans mémoire.

Observation. Soit ρ une partie et ρ' un suffixe de ρ. Alors $Par(\rho) = Par(\rho')$.

Conséquence.

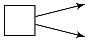
Une partie conforme à $\sigma_{\mathrm{P}}(G, \pi)$ démarrant dans $W_{\mathrm{P}}(G, \pi)$ ne le quitte jamais.

1. **Memoryless determinacy of finite parity games : Another simple proof. IPL 132**

Classification des sommets

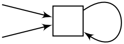
Un sommet est *évanescent* s'il ne possède pas d'arc entrant.

V_{e} est l'ensemble des sommets évanescents.



Un sommet est *absorbant* si son unique arc sortant est une boucle.

V_{a} est l'ensemble des sommets absorbants.



Un sommet est *significatif* s'il n'est ni évanescent ni absorbant.

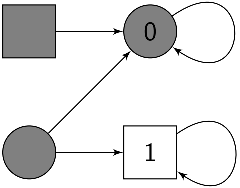
V_{s} est l'ensemble des sommets significatifs.

Observation.

Tout stratégie restreinte aux sommets évanescents et absorbants est sans mémoire.

Preuve du théorème. Par récurrence sur le nombre de sommets significatifs.

Jeux sans sommets significatifs



Soit v absorbant alors v est gagnant pour $\widehat{\pi(v)}$.

Soit v évanescent alors P a une stratégie gagnante partant de v si

- $v \in V_{\mathrm{P}}$ et il existe $(v, v') \in E$ et $\widehat{\pi(v')} = \mathrm{P}$;
- $v \notin V_{\mathrm{P}}$ et pour tout $(v, v') \in E$, $\widehat{\pi(v')} = \mathrm{P}$.

Par conséquent, le théorème est établi pour les jeux sans sommets significatifs.

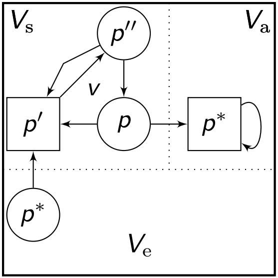
Construction de (G^+, π^+)

Soit v un sommet significatif de priorité maximale p.

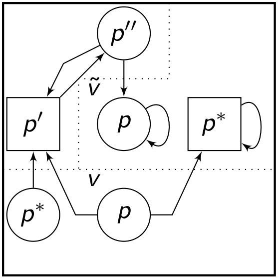
Alors (G^+, π^+) est obtenu en :

- ajoutant un sommet absorbant $\tilde{v}$ de priorité p ;
- redirigeant les arcs entrants en v vers $\tilde{v}$.

(G, π)

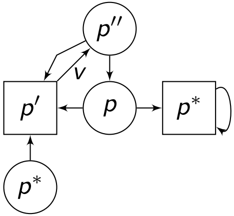


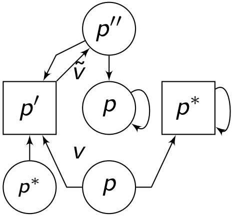
(G^+, π^+)



v devient evanescent. D'où G^+ possède moins d'états significatifs que G
Par conséquent l'hypothèse de récurrence s'applique.

De (G^+, π^+) à (G, π)





- En utilisant $\sigma_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$ dans (G, π), $\mathrm{W}_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+) \subseteq \mathrm{W}_{1-\hat{p}}(G, \pi)$.
- **Cas** $v \in \mathrm{W}_{\hat{p}}(G^+, \pi^+)$**.** En utilisant $\sigma_{\hat{p}}(G^+, \pi^+)$ dans (G, π), soit ρ une partie démarrant dans $\mathrm{W}_{\hat{p}}(G^+, \pi^+) \setminus \{\tilde{v}\}$ (ρ ne quitte pas $\mathrm{W}_{\hat{p}}(G^+, \pi^+)$).
  - S'il existe ρ' suffixe de ρ qui ne visite pas v, ρ' est une partie gagnante de (G^+, π^+) pour $\hat{p}$.
  - Soit ρ visite infiniment souvent v d'où $Pri(\rho) = p$.

Donc $\mathrm{W}_{\hat{p}}(G^+, \pi^+) \setminus \{\tilde{v}\} \subseteq \mathrm{W}_{\hat{p}}(G, \pi)$.
D'où $\mathrm{W}_{1-\hat{p}}(G, \pi) = \mathrm{W}_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$ et $\mathrm{W}_{\hat{p}}(G, \pi) = \mathrm{W}_{\hat{p}}(G^+, \pi^+) \setminus \{\tilde{v}\}$.

Quid du cas $v \in \mathrm{W}_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$?

Construction de (G^-, π^-)

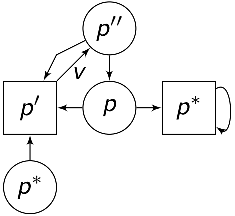
(G^-, π^-) est obtenu en :

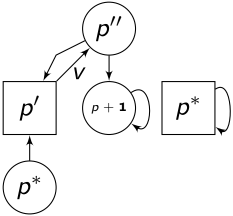
- affectant la priorité $p+1$ à v ;
- rendant v absorbant.

(G^-, π^-) possède moins d'états significatifs que (G, π)

et l'hypothèse de récurrence s'applique.

Cas $v \in W_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$





- En utilisant $\sigma_{\hat{p}}(G^-, \pi^-)$ dans (G, π), soit ρ démarrant dans $W_{\hat{p}}(G^-, \pi^-)$.
  ρ ne visite pas v et donc est une partie de (G^-, π^-) gagnante pour $\hat{p}$.
  D'où $W_{\hat{p}}(G^-, \pi^-) \subseteq W_{\hat{p}}(G, \pi)$.

- Soit dans (G, π), $\sigma_{1-\hat{p}}$ définie par $\sigma_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$ sur $V_{1-\hat{p}} \cap W_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$ et par $\sigma_{1-\hat{p}}(G^-, \pi^-)$ sur $V_{1-\hat{p}} \setminus W_{1-\hat{p}}(G^-, \pi^-)$.

  Soit ρ une partie conforme à $\sigma_{1-\hat{p}}$ dans G démarrant dans $W_{1-\hat{p}}(G^-)$.
  - Ou bien ρ ne visite pas $W_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$.
    Donc ρ est une partie conforme à $\sigma_{1-\hat{p}}(G^-, \pi^-)$ dans (G^-, π^-).
  - Ou bien un suffixe de ρ est une partie conforme à $\sigma_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$ dans (G^+, π^+) démarrant dans $W_{1-\hat{p}}(G^+, \pi^+)$.

D'où $W_{1-\hat{p}}(G^-, \pi^-) \subseteq W_{1-\hat{p}}(G, \pi)$.

Complexité des jeux de parité

Appliquer une stratégie σ_0 sans mémoire à (G, π)

consiste à supprimer les arcs issus de V_0 non choisis par σ_0.

σ_0 est gagnante pour 0 en démarrant en $v \in V$
s'il n'existe pas de circuit dans le graphe modifié :

- accessible depuis v ;
- telle que la priorité maximale du circuit soit impaire.

Décider si P a une stratégie gagnante pour un sommet initial est dans NP $\cap$ coNP.

Soit p le nombre de priorités différentes et n le nombre de sommets.

Les meilleurs algorithmes opèrent en $O(n^{\log(p)})$.

Jeu de géographie

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Soit une partie $\rho = v_0 v_1 \dots$

On définit $\mathit{first}(\rho) = \min(i \mid \exists\, j \leq i \;\, v_j = v_{i+1})$.

Alors $\mathit{Win} = \{\rho \mid v_{\mathit{first}(\rho)} \in V_1\}$. Autrement dit,

le premier joueur qui choisit de visiter un sommet déjà visité a perdu.

Observations.

C'est en fait un jeu fini avec au plus $|V|$ tours.

Décider si une position est gagnante pour un joueur est difficile : PSPACE-complet.