Algorithmique avancée : Programmation linéaire

Serge Haddad

LSV, ENS Paris-Saclay & CNRS & Inria

L3

Plan

1. Spécification du problème

L'algorithme du simplexe

La dualité

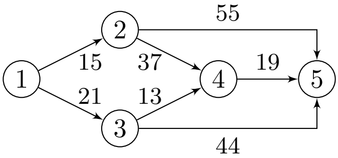
Un algorithme en temps polynomial

Application à l'approximation

Un exemple introductif

Le problème du flot maximal. Soit un graphe orienté $G = (V, E)$ avec $s, d \in V$ et doté d'une capacité $\kappa : E \to \mathbb{N}$ tel que :

- s n'ait pas d'arc entrant et tout sommet soit accessible depuis s ;
- d n'ait pas d'arc sortant et tout sommet soit co-accessible depuis d.



Le problème du flot maximal consiste à attribuer un débit à chaque arc

- qui n'excède pas la capacité ;
- qui vérifie les lois de Kirchhoff ;
- qui maximise le débit sortant de s.

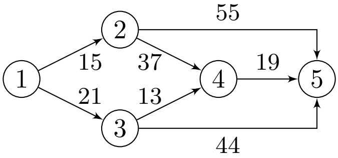
Spécification formelle

Soit l'ensemble de variables $\{x_{u,v}\}_{(u,v)\in E}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Maximiser $\sum_{(s,v)\in E} x_{s,v}$ tel que :

$$\begin{aligned} \forall v \in V \setminus \{s,d\} \qquad & \sum_{(u,v)\in E} x_{u,v} - \sum_{(v,w)\in E} x_{v,w} && = && 0 \\ \forall (u,v) \in E \qquad & x_{u,v} && \leq && \kappa(u,v) \end{aligned}$$

Illustration.



Maximiser $x_{1,2} + x_{1,3}$ tel que :

- $x_{1,2} = x_{2,4} + x_{2,5}$, $x_{1,3} = x_{3,4} + x_{3,5}$, $x_{2,4} + x_{3,4} = x_{4,5}$;
- $x_{1,2} \leq 15$, $x_{1,3} \leq 21$, $x_{2,4} \leq 37$, $x_{2,5} \leq 55$, $x_{3,4} \leq 13$, $x_{3,5} \leq 44$, $x_{4,5} \leq 19$.

Différentes formulations

Formulation générale.

- $A = (a_{i,j})$ une matrice entière indicée par $I \uplus I' \times J \uplus J'$
- $b = (b_i)$ un vecteur colonne entier indicé par $I \uplus I'$
- $c = (c_j)$ un vecteur ligne entier indicé par $J \uplus J'$

Interprétation.

Un ensemble $\{x_j\}_{j \in J}$ de variables dans $\mathbb{R}_+$ et $\{x_j\}_{j \in J'}$ de variables dans $\mathbb{R}$

Un ensemble I d'égalités : $\forall i \in I \ \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j = b_i$

Un ensemble I' d'inégalités : $\forall i \in I' \ \sum_{j \in J \uplus J'} a_{i,j} x_j \geq b_i$

Une fonction de coût à minimiser : $\sum_{j \in J \uplus J'} c_j x_j$

Formulation standard.

Uniquement des variables positives ($J' = \emptyset$) et des égalités ($I' = \emptyset$).

Formulations canoniques.

Uniquement des variables positives ($J' = \emptyset$) et des inégalités ($I = \emptyset$).

Uniquement des variables réelles ($J = \emptyset$) et des inégalités ($I = \emptyset$).

Intérêt des formulations restreintes

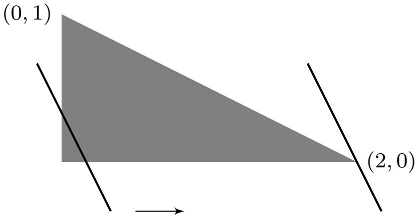
Formulation standard.

- Se prête à l'algorithme du simplexe.

Formulation canonique.

- Se prête à un algorithme en temps polynomial.
- Donne lieu à une interprétation géométrique.

Maximiser $2x_1 + x_2$ tel que $0 \leq x_1 \wedge 0 \leq x_2 \wedge x_1 + 2x_2 \leq 2$



Transformer la formulation générale

De la formulation générale à la formulation canonique.

- Remplacer $\sum_{j\in J\uplus J'} a_{i,j}x_j = b_i$ par : $\sum_{j\in J\uplus J'} a_{i,j}x_j \geq b_i \wedge -\sum_{j\in J\uplus J'} a_{i,j}x_j \geq -b_i$
- Pour tout $j \in J'$, ajouter deux variables positives x_j^+, x_j^-
- Substituer dans les équations et la fonction de coût x_j par $x_j^+ - x_j^-$

De la formulation générale à la formulation standard.

- Pour tout $i \in I'$, ajouter une variable positive x_i^s
- Remplacer $\sum_{j\in J\uplus J'} a_{i,j}x_j \geq b_i$ par $\sum_{j\in J\uplus J'} a_{i,j}x_j - x_i^s = b_i$
- Pour tout $j \in J'$, ajouter deux variables positives x_j^+, x_j^-
- Substituer dans les équations et la fonction de coût x_j par $x_j^+ - x_j^-$

Observation. Les transformations s'effectuent en temps linéaire.

Plan

Spécification du problème

2 L'algorithme du simplexe

La dualité

Un algorithme en temps polynomial

Application à l'approximation

Un pré-calcul

Rappel de la spécification.

$A = (a_{i,j})_{i \leq m, j \leq n}$, $b = (b_i)_{i \leq m}$ et $c = (c_j)_{j \leq n}$.

$x = (x_i)_{i \leq n}$ est un vecteur de variables.

$$\text{Minimiser } f(x) \overset{\text{def}}{=} c \cdot x \text{ tel que } Ax = b \wedge x \geq 0$$

Élimination des équations redondantes (Gauss).

For i **from** 1 **to** m **do**
  If $\exists a_{i,k} \neq 0$ **then**
    For i' **from** $i+1$ **to** m **do**
      For j **from** 1 **to** n **do** $a_{i',j} \leftarrow a_{i',j} - a_{i,j} \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$
      $b_{i'} \leftarrow b_{i'} - b_i \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$
  Else if $b_i \neq 0$ **then return** pas de solutions
  Else supprimer la ligne i

Résultat. Le problème est inchangé
mais le rang de A est égal à son nombre de lignes (toujours noté m), d'où $n \geq m$.

Illustration

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	1	1	0	5	1	3
	1	1	1	4	4	6
c	1	1	1	1	1	0

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	1	1	1	2	5
c	1	1	1	1	1	0

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3
c	1	1	1	1	1	0

Base d'un programme linéaire

Soit $B \subseteq J$ avec $\bar{B} = J \setminus B$.

On note A_B la sous-matrice de A réduite aux colonnes de B.

$$\boxed{B \text{ est une } \textit{base} \text{ si } |B| = m,\ A_B \text{ est inversible et } A_B^{-1} b \geq 0.}$$

Soit le vecteur $x^{(B)} \geq 0$ défini par :

- pour tout $j \in B$, $x_j^{(B)} = (A_B^{-1} b)_j$;
- pour tout $j \in \bar{B}$, $x_j^{(B)} = 0$.

Alors $Ax^{(B)} = b$.

Illustration $B = \{1, 2, 3\}$ et $x^{(B)} = (1, 2, 3, 0, 0)$.

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3
c	1	1	1	1	1	0

Fonction de coût et base

Observation.

On peut supposer que le domaine de $f(x) = c \cdot x$ est $\{x \mid Ax = b\}$.

On note x_B la restriction de x à B et $x_{\bar{B}}$ la restriction de x à $\bar{B}$.

Soit x tel que $Ax = b$. Puisque $A_B x_B + A_{\bar{B}} x_{\bar{B}} = b$, $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_{\bar{B}} x_{\bar{B}}$.
Par conséquent la fonction de coût peut se réécrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B \cdot x_B + c_{\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}} \\ &= c_B A_B^{-1} b + (c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}) x_{\bar{B}} \\ &= c \cdot x^{(B)} + (c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}) x_{\bar{B}} \end{aligned}$$

Notations. $A_{B\bar{B}} \stackrel{\text{def}}{=} A_B^{-1} A_{\bar{B}}$, $b_{B\bar{B}} \stackrel{\text{def}}{=} A_B^{-1} b$ et $c_{B\bar{B}} \stackrel{\text{def}}{=} c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}}$.

Illustration

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3
c	1	1	1	1	1	0

$x_1 = 1 - 3x_4 - 2x_5$, $x_2 = 2 - 2x_4 + x_5$ et $x_3 = 3 + x_4 - 3x_5$

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - 3x_4 - 2x_5 + 2 - 2x_4 + x_5 + 3 + x_4 - 3x_5 + x_4 + x_5 \\ &= 6 - 3x_4 - 3x_5 \end{aligned}$$

$(Id, A_{B\bar{B}})$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$b_{B\bar{B}}$
	1	0	0	3	2	1
	0	1	0	2	-1	2
	0	0	1	-1	3	3
$c_{B\bar{B}}$				-3	-3	6
						$c \cdot x^{(B)}$

Une itération du simplexe (1)

L'algorithme maintient :

- la base courante B et sa solution $x^{(B)}$;
- la correspondance entre les indices de B et de I ;
  (dans l'exemple, $i_1^B = 1$, $i_2^B = 2$ et $i_3^B = 3$)
- l'équation $x_B + A_{B\bar{B}} x_{\bar{B}} = b_{B\bar{B}}$;
- l'écriture courante de la fonction de coût $f(x) = c \cdot x^{(B)} + c_{B\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}}$.

A l'issue d'une itération, il y a trois possibilités :

- $x^{(B)}$ est une solution optimale ;
- le problème n'est pas minoré : $\min(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0) = -\infty$;
- la nouvelle base $B' = B \cup \{e\} \setminus \{s\}$ vérifie $f(x^{(B')}) \leq f(x^{(B)})$
  et $f(x^{(B')}) < f(x^{(B)})$ si $x^{(B')} \neq x^{(B)}$.

Une itération du simplexe (2)

- Si $c_{B\overline{B}} \geq 0$ alors $x^{(B)}$ est une solution optimale.
- Sinon l'algorithme choisit un indice entrant e tel que $c_{B\overline{B}}[e] < 0$.

  On augmente $x^{(B)}[e] = 0$ autant que possible en modifiant pour chaque $j \in B$, $x^{(B)}[j]$ de manière à satisfaire l'équation i_j^B :

$$(i_j^B) \qquad x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

- Si $\{j \mid A_{B\bar{B}}[i_j^B, e] > 0\} = \emptyset$, $x^{(B)}[e]$ peut croître indéfiniment et le problème n'est pas minoré.
- Sinon

  $x^{(B')}[e] = \min(\frac{b_{B\bar{B}}[i_j^B]}{A_{B\bar{B}}[i_j^B,e]} \mid A_{B\bar{B}}[i_j^B, e] > 0)$.

  $s \in \{j \mid A_{B\bar{B}}[i_j^B, e] > 0 \wedge A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x^{(B')}[e] = b_{B\bar{B}}[i_j^B]\}$.

  $i_e^{B'} = i_s^B$ et pour tout $j \in B \setminus \{e\}$, $i_j^{B'} = i_j^B$.

Illustration

$(Id, A_{B\bar{B}})$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		$b_{B\bar{B}}$
	1	0	0	3	2		1
	0	1	0	2	-1		2
	0	0	1	-1	3		3
$c_{B\bar{B}}$				-3	-3		6
							$c \cdot x^{(B)}$

Soit $e = 5$.

- Pour satisfaire l'équation (1) avec $x_1 \geq 0$, x_5 peut croître jusqu'à $\frac{1}{2}$ car $x_1 + 2x_5$ doit rester constant et égal à 1 ;
- Pour satisfaire l'équation (2) avec $x_2 \geq 0$, x_5 peut croître indéfiniment car $x_2 - x_5$ doit rester constant et égal à 2 ;
- Pour satisfaire l'équation (3) avec $x_3 \geq 0$, x_5 peut croître jusqu'à $\frac{3}{3}$ car $x_3 + 3x_5$ doit rester constant et égal à 3.

D'où $s = 1$ et $x^{(B')}[e] = \frac{1}{2}$.

Une itération du simplexe (3)

Mise à jour des coefficients des équations.

- L'équation i_s^B

$$x_s + A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

  devient l'équation $i_e^{B'}$

$$A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}x_s + x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'} = A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}b_{B\bar{B}}[i_s^B]$$

- Soit $E \overset{\text{def}}{=} A_{B\bar{B}}[i_s^B, e]^{-1}(b_{B\bar{B}}[i_s^B] - x_j - \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_s^B, j']x_{j'})$. Alors $x_e = E$.

- Une équation $i_j^B \neq i_s^B$

$$x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]x_e + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

  devient l'équation $i_j^{B'}$

$$x_j + A_{B\bar{B}}[i_j^B, e]E + \sum_{j' \in \bar{B} \setminus \{e\}} A_{B\bar{B}}[i_j^B, j']x_{j'} = b_{B\bar{B}}[i_j^B]$$

Calcul de f.

$f(x) = c \cdot x^{(B)} + c_{B\bar{B}} \cdot x_{\bar{B}}$ devient $c \cdot x^{(B)} + \sum_{j \in \bar{B} \setminus \{e\}} c_{B\bar{B}}[j]x_j + c_{B\bar{B}}[e]E$.

Illustration

- L'équation $x_1 + 3x_4 + 2x_5 = 1$ devient $\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{1}{2}$.
- $x_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4$.
- L'équation $x_2 + 2x_4 - x_5 = 2$ devient $x_2 + 2x_4 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 2$ soit $x_2 + \frac{7}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{2}$.
- L'équation $x_3 - x_4 + 3x_5 = 3$ devient $x_3 - x_4 + 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4) = 3$ soit $x_3 - \frac{11}{2}x_4 - \frac{3}{2}x_1 = \frac{3}{2}$
- $f(x) = 6 - 3x_4 - 3x_5$ devient $6 - 3x_4 - 3(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_4)$ soit $\frac{9}{2} + \frac{3}{2}x_4 + \frac{3}{2}x_1$.

$A_{B'\bar{B}'}$	x_5	x_2	x_3	x_4	x_1	$b_{B'\bar{B}'}$
	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	1	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
	0	0	1	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
$c_{B'\bar{B}'}$				$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$
						$c \cdot x^{(B')}$

Cette solution est optimale.

Terminaison

Observations.

- Il y a un nombre fini de bases inférieur ou égal à $\binom{n}{m}$ (donc exponentiel).
- La terminaison est garantie si on ne rencontre pas deux fois la même base.
- f décroît ou est inchangé à chaque itération.

Si l'algorithme ne se termine pas alors il existe $B_1, B_2, \ldots, B_K = B_1$ une suite de bases rencontrées par l'algorithme avec $f(x^{(B_1)}) = \ldots = f(x^{(B_K)})$ ce qui implique que :

- $x^{(B_1)} = \ldots = x^{(B_K)}$
- les variables correspondant aux indices entrants et sortants des B_i sont nulles.

La règle de Bland. Choisir le plus petit indice entrant et sortant possible.

$$\boxed{\text{Si la règle de Bland est appliquée alors l'algorithme se termine.}}$$

(preuve par l'absurde)

Correction de la règle de Bland (1)

- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1\leq k<K} B_k$ ainsi que les équations $i_j^{B_k}$ alors l'algorithme ne se termine pas non plus.
- En supprimant les indices j de $\bigcap_{1\leq k<K} \bar{B}_k$ et les occurrences de x_j dans les équations et dans f alors l'algorithme ne se termine pas non plus.

Nous pouvons donc supposer que :

- tout indice entre et sort de la base au moins une fois durant la suite d'itérations ;
- pour tout k, $x^{(B_k)} = 0$ et donc $f(x^{(B_k)}) = 0$.

Soit jm l'indice maximum et :

- B_k telle que $jm \in \bar{B}_k \cap B_{k+1}$ *(jm entre dans la base B_{k+1})*
- $B_{k'}$ telle que $jm \in B_{k'} \cap \bar{B}_{k'+1}$ *(jm sort de la base $B_{k'}$)*
- jn tel que $\in \bar{B}_{k'} \cap B_{k'+1}$ *(jn entre dans la base $B_{k'+1}$)*

Correction de la règle de Bland (2)

Définissons le vecteur y par :

- $y[jn] = 1$;
- Pour tout $j \in B_{k'}$, $y[j] = -A_{B_{k'},\bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn]$;
- Pour tout $j \in \bar{B}_{k'} \setminus \{jn\}$, $y[j] = 0$.

Par construction, $Ay = b$.

$f(y) = f(\mathbf{0}) + c_{B_{k'},\bar{B}_{k'}}[jn] = c_{B_{k'},\bar{B}_{k'}}[jn] < 0$ puisque jn entre dans $B_{k'+1}$.

Puisque jm sort de $B_{k'}$, $A_{B_{k'},\bar{B}_{k'}}[i_{jm}^{B_{k'}}, jn] > 0$.

Pour tout $j \in B_{k'} \setminus \{jm\}, A_{B_{k'},\bar{B}_{k'}}[i_j^{B_{k'}}, jn] \leq 0$ d'après la règle de Bland.

D'où $y[j] < 0 \Leftrightarrow j = jm$.

Puisque jm entre dans B_{k+1}, $c_{B_k\bar{B}_k}[jm] < 0$.

D'après la règle de Bland, pour tout $j \in \bar{B}_k \setminus \{jm\}, c_{B_k\bar{B}_k}[j] \geq 0$.

$f(y) = \sum_{j\in\bar{B}_k\setminus\{jm\}} c_{B_k\bar{B}_k}[j]y[j] + c_{B_k\bar{B}_k}[jm]y[jm] \geq c_{B_k\bar{B}_k}[jm]y[jm] > 0$.

D'où une contradiction.

Initialisation : un programme auxiliaire

L'algorithme présenté plus haut nécessite une base initiale.

Pour en trouver une (s'il en existe) on introduit un programme linéaire auxiliaire.

Sans perte de généralité $b \geq 0$.

Le programme linéaire est « étendu » avec m variables $y = (x_{n+1}, \dots, x_{n+m})$.

La matrice A est étendue par :

$$\forall 1 \leq i \leq m, A[i, n+i] = 1 \wedge \forall n+1 \leq j \neq n+i \leq n+m, A[i,j] = 0$$

Autrement dit $Ax + y = b$.

La nouvelle fonction de coût est : $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n<i\leq n+m} x_i$.

$B_0 = \{n+1, \dots, n+m\}$ est une base : $A_{B_0} = Id$ et $A_{B_0}^{-1} b = b \geq 0$.

Initialisation : construction d'une base

Puisque $g \geq 0$ l'algorithme renvoie $x^{(B)}$ une solution optimale.

Cas n°1 : $g(x^{(B)}) > 0$. Alors le problème initial n'admet pas de solution.

Cas n°2 : $g(x^{(B)}) = 0$. $(Id \mid A_{B\bar{B}})_{\{1,\ldots,n\}} = A_B^{-1} A_{\{1,\ldots,n\}}$ et $rang(A_{\{1,\ldots,n\}}) = m$.

Soit $j \in B \cap \{n+1, \ldots, n+m\}$. Il existe $j' \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $A_{B\overline{B}}[i_j^B, j'] \neq 0$.

Sinon le vecteur ligne d'indice i_j^B de $A_{\{1,\ldots,n\}}$ serait nul et $rang(A_{\{1,\ldots,n\}}) < m$.

$B' = B \setminus \{j\} \cup \{j'\}$ est aussi optimale puisque $x_j = x_{j'} = 0$.

En itérant, on obtient $B^* \subseteq \{1, \ldots, n\}$ une base du programme linéaire initial.

Plan

Recherche d'un minorant

Soit un programme linéaire standard (A, b, c).

Soit $y \in \mathbb{R}^I$ telle que $d \stackrel{\text{def}}{=} yA$ vérifie $d \leq c$.
Alors pour tout $x \geq 0$ tel que $Ax = b$, $y \cdot b = yAx = d \cdot x \leq c \cdot x$
Autrement dit, $y \cdot b \leq \min(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$.
Pour rechercher le « meilleur » y , on définit le problème *dual* suivant :

$$\texttt{Maximiser } y \cdot b \texttt{ tel que } y \in \mathbb{R}^I \wedge yA \leq c$$

Cas général. Soit **P** le problème *primal* :

$$\texttt{Minimiser } c \cdot x \texttt{ tel que :}$$

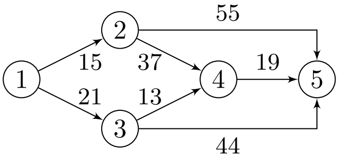
$$\forall i \in I, A[i, -] \cdot x = b_i \wedge \forall i \in I', A[i, -] \cdot x \geq b_i \wedge \forall j \in J, x_j \geq 0$$

Alors **D** le problème *dual* de **P** où $y \in R^{I \cup I'}$ est défini par :

$$\texttt{Maximiser } y \cdot b \texttt{ tel que :}$$

$$\forall j \in J, y \cdot A[-, j] \leq c_j \wedge \forall j \in J', y \cdot A[-, j] = c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

Illustration



Soit **P**. Maximiser $x_{1,2} + x_{1,3}$ tel que

- $x_{1,2} = x_{2,4} + x_{2,5}$, $x_{1,3} = x_{3,4} + x_{3,5}$, $x_{2,4} + x_{3,4} = x_{4,5}$;
- $x_{1,2} \leq 15$, $x_{1,3} \leq 21$, $x_{2,4} \leq 37$, $x_{2,5} \leq 55$, $x_{3,4} \leq 13$, $x_{3,5} \leq 44$, $x_{4,5} \leq 19$.

Alors **D** est défini (après réécriture) par :
Minimiser $15y_{1,2} + 21y_{1,3} + 37y_{2,4} + 55y_{2,5} + 13y_{3,4} + 44y_{3,5} + 19y_{4,5}$ tel que

- $y_{1,2}, y_{1,3}, y_{2,4}, y_{2,5}, y_{3,4}, y_{3,5}, y_{4,5} \geq 0$;
- $1 \leq y_{1,2} + y_2$, $1 \leq y_{1,3} + y_3$;
- $y_2 \leq y_{2,4} + y_4$, $y_3 \leq y_{3,4} + y_4$;
- $y_2 \leq y_{2,5}$, $y_3 \leq y_{3,5}$ et $y_4 \leq y_{4,5}$.

Une solution : $y_2 = y_{2,4} = y_{2,5} = y_{1,3} = 1$ et $y_3 = y_4 = y_{1,2} = y_{3,4} = y_{3,5} = y_{4,5} = 0$.

Le dual du dual est le primal

$$\texttt{Maximiser } y \cdot b \texttt{ tel que :}$$
$$\forall j \in J, y \cdot A[-,j] \leq c_j \wedge \forall j \in J', y \cdot A[-,j] = c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

se réécrit :

$$\texttt{Minimiser } -b \cdot y \texttt{ tel que :}$$
$$\forall j \in J, -A^t[j,-] \cdot y \geq -c_j \wedge \forall j \in J', -A^t[j,-] \cdot y = -c_j \wedge \forall i \in I', y_i \geq 0$$

Autrement dit, $\mathbf{D} = (I_{\mathbf{D}}, I'_{\mathbf{D}}, J_{\mathbf{D}}, J_{\mathbf{D}}, J'_{\mathbf{D}}, A_{\mathbf{D}}, b_{\mathbf{D}}, c_{\mathbf{D}})$ est défini par :

- $I_{\mathbf{D}} = J'$, $I'_{\mathbf{D}} = J$, $J_{\mathbf{D}} = I'$ et $J'_{\mathbf{D}} = I$;
- Pour tout i, j, $A_{\mathbf{D}}[i,j] = -A[j,i]$;
- $b_{\mathbf{D}} = -c$ et $c_{\mathbf{D}} = -b$.

En appliquant une nouvelle fois cette transformation, on obtient **P**.

Dualité faible

Soit x une solution (non nécessairement optimale) de **P** et y une solution (non nécessairement optimale) de **D**. Alors :

$$y \cdot b \leq yAx \leq c \cdot x$$

Preuve.

$\forall j \in J, (y \cdot A[-,j])x_j \leq c_j x_j$ puisque $x_j \geq 0$.

$\forall j \in J', (y \cdot A[-,j])x_j = c_j x_j$.

D'où : $\sum_{j \in J \cup J'} (y \cdot A[-,j])x_j \leq \sum_{j \in J \cup J'} c_j x_j$.

Autrement dit : $yAx \leq c \cdot x$.

$\forall i \in I', y_i(A[i,-] \cdot x) \geq y_i b_i$ puisque $y_i \geq 0$.

$\forall i \in I, y_i(A[i,-] \cdot x) = y_i b_i$.

D'où : $\sum_{i \in I \cup I'} y_i(A[i,-] \cdot x) \geq \sum_{i \in I \cup I'} y_i b_i$.

Autrement dit : $yAx \geq y \cdot b$.

Dualité forte (Tucker et al 1948)

- Si **P** n'est pas minoré alors **D** n'admet pas de solution.
- Si **D** n'est pas majoré alors **P** n'admet pas de solution.
- **P** admet une solution optimale si et seulement si **D** admet une solution optimale. Dans ce cas, les valeurs optimales coïncident.

Preuve. *(cas d'une formulation standard)*

Les deux premières affirmations découlent de la dualité faible.

Supposons que **P** ait une solution optimale et soit B une base optimale. B vérifie :

$$f(x^{(B)}) = c_B A_B^{-1} b \wedge c_{\bar{B}} - c_B A_B^{-1} A_{\bar{B}} \geq 0$$

Posons $y = c_B A_B^{-1}$. Alors :

$$c_B = y A_B \wedge c_{\bar{B}} \geq y A_{\bar{B}}$$

D'où $c \geq yA$ ce qui établit que y est une solution de **D**.

D'autre part, $f(x^{(B)}) = y \cdot b$, donc les valeurs optimales de **P** et **D** coïncident.

Pour établir la réciproque, il suffit d'observer que **P** est le dual de **D**.

Plan

Spécification du problème

L'algorithme du simplexe

La dualité

4 Un algorithme en temps polynomial

Application à l'approximation

Considérations de taille

Bornes supérieures de représentation polynomiale.

Soit $\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid A \cdot x = b \wedge x \geq 0)$ et $C_{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i,j}(|A[i,j]|, |b[i]|, |c[i]|)$.
Si **P** a une solution optimale, alors il a une solution optimale $\tilde{x}$ d'une base.

Tous les coefficients de $\tilde{x}$ sont des fractions dont
les numérateurs et le dénominateur commun sont des déterminants de taille m.

Ainsi les coefficients de $\tilde{x}$ sont bornés par $B_{\mathbf{P}} \stackrel{\text{def}}{=} m! C_{\mathbf{P}}^m$ et $|c \cdot \tilde{x}| \leq m C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}$.

Borne inférieure de représentation polynomiale.

Soient deux solutions $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ associées à des bases telles que $c \cdot \tilde{x} \neq c \cdot \tilde{y}$.

Tous les coefficients de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont des fractions dont
leurs dénominateurs communs $B_{\tilde{x}}$ et $B_{\tilde{y}}$ vérifient $\max(B_{\tilde{x}}, B_{\tilde{y}}) \leq B_{\mathbf{P}}$.

Par conséquent,

$$|c \cdot \tilde{x} - c \cdot \tilde{y}| \geq \frac{1}{ppcm(B_{\tilde{x}}, B_{\tilde{y}})} > \frac{1}{B_{\mathbf{P}}^2}$$

Interlude : De l'optimisation à la décision (1)

Illustration. Le problème de la clique maximale d'un graphe $G = (V, E)$.

Un algorithme de résolution du problème d'optimisation
fournit un algorithme de résolution du problème de décision.

Quid de l'inverse ?

Première étape. Détermination de la taille maximale.

$t \leftarrow |V|$
While not Exist(G, t) **do**
  $t \leftarrow t - 1$
Return(t)

Au plus $|V|$ appels.

Peut être réduit à $\log(|V|)$ appels par recherche dichotomique.

De l'optimisation à la décision (2)

Deuxième étape. Détermination de la clique.

$W \leftarrow \emptyset$; $V' \leftarrow V$; $E' \leftarrow E$

While $t > 0$ **do**

  Let $v \in V'$

  $V'' \leftarrow V' \setminus \{v\}$

  $E'' \leftarrow E' \setminus \{\{v,w\} \mid \{v,w\} \in E'\}$

  If Exist$((V'', E''), t)$ **then**

    $V' \leftarrow V''$; $E' \leftarrow E''$

  Else

    $V' \leftarrow \{w \mid \{v,w\} \in E'\}$;

    $E' \leftarrow \{\{u,w\} \mid \{u,w\} \in E' \wedge \{u,w\} \subseteq V'\}$

    $t \leftarrow t-1$; $W \leftarrow W \cup \{v\}$

Return(W)

Au plus $|V|$ appels.

De l'optimisation à l'existence (1)

On suppose qu'on peut résoudre le problème de l'existence en temps polynomial.

On démontre alors qu'on peut résoudre
$\mathbf{P} = \max(c \cdot x \mid Ax = b \wedge x \geq 0)$ en temps polynomial.

- On décide si $\mathbf{P}$ admet une solution en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0\}$.
- Dans l'affirmative on décide si $\mathbf{P}$ est non majoré en résolvant le problème de l'existence de $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}} + 1\}$.
- On calcule l'unique p entre $-mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ et $mC_{\mathbf{P}}B_{\mathbf{P}}^3$ tel que $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{x} < \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$ par une recherche dichotomique en résolvant successivement un nombre polynomial de problèmes $\{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge c \cdot x \geq \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$.
- On détermine une base d'une solution optimale en résolvant successivement les problèmes $\mathbf{P}_j \ = \{Ax = b \wedge x \geq 0 \wedge x_j = 0 \bigwedge_{k \in S(j)} x_k = 0 \wedge \frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot x \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}\}$. où $S(j)$ est l'ensemble des $k < j$ pour lesquels il existe une solution à $\mathbf{P}_k$.
- Soit $\tilde{y}$ une solution arbitraire de $\mathbf{P}_S \ =\{Ax = b \bigwedge_{k \in S} x_k = 0\}$. où S est l'ensemble des k pour lesquels il existe une solution à $\mathbf{P}_k$.

De l'optimisation à l'existence (2)

Par construction, il existe une solution positive $\tilde{x}$ de $\mathbf{P}_S$. Supposons que $\tilde{y} \neq \tilde{x}$.

- Soit $c \cdot \tilde{x} - c \cdot \tilde{y} = K > 0$. Soit $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{x} - \tilde{y})$ pour $\lambda > 0$.
  $A \cdot \tilde{z} = b$ et $c \cdot \tilde{z} = c \cdot \tilde{x} + \lambda K$.
  Puisque la valeur optimale est majorée par $\frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$, il existe λ tel que :
  - $\tilde{z} \geq 0$;
  - le support de $\tilde{z}$ soit *strictement* inclus dans $J \setminus S$;
  - $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{z} \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$.

ce qui contredit la construction de S.

- Soit $c \cdot \tilde{y} - c \cdot \tilde{x} = K < 0$. Soit $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{y} - \tilde{x})$ pour $\lambda > 0$.
  Par un raisonnement identique, on obtient aussi une contradiction.

De l'optimisation à l'existence (3)

- Soit $c \cdot \tilde{y} = c \cdot \tilde{x}$ et il existe i tel que $\tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0$.

  Considérons $\tilde{z} = \tilde{x} + \lambda(\tilde{y} - \tilde{x})$ avec $\lambda = \min(\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{x}_i - \tilde{y}_i} \mid \tilde{y}_i - \tilde{x}_i < 0)$.

  Alors $\tilde{z} \geq 0$ est une solution de support strictement inclus dans $J \setminus S$ vérifiant $\frac{p}{B_{\mathbf{P}}^2} \leq c \cdot \tilde{z} \leq \frac{p+1}{B_{\mathbf{P}}^2}$.

  ce qui contredit la construction de S.

- Soit $c \cdot \tilde{y} = c \cdot \tilde{x}$ et il existe i tel que $\tilde{x}_i - \tilde{y}_i < 0$.

  Par un raisonnement identique, on obtient aussi une contradiction.

$A_{J \setminus S}$ a donc un noyau nul et $\tilde{x}$ est la solution d'une base $\tilde{B}$ telle que $J \setminus S \subseteq \tilde{B}$.

Soit x^* une solution optimale associée à une base, $c \cdot x^* - c \cdot \tilde{x} \leq \frac{1}{B_{\mathbf{P}}^2}$.

Donc $c \cdot x^* = c \cdot \tilde{x}$.

La dualité revisitée (Farkas 1902)

Soit A une matrice $m \times n$ et b un vecteur de dimension n.

Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\exists x \in \mathbb{R}^n \; Ax \leq b$
2. $\nexists y \in \mathbb{R}^m \; y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1$

Preuve.

Soit $\mathbf{P} = \max(u \mid Ax - ub \leq 0 \wedge x \in \mathbb{R}^n \wedge u \in \mathbb{R}\}$.

P admet une solution ($(x, u) = (\mathbf{0}, 0)$).

P admet (x, u) avec $u > 0$ ssi **P** admet $(u^{-1}x, 1)$ ssi **P** est non majoré.

Son dual est $\mathbf{D} = \min(0 \mid y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1)$.

Si 1. est satisfaite alors **P** n'est pas majoré et **D** n'admet pas de solution.

Par conséquent 2. est satisfaite.

Si 1. n'est pas satisfaite alors **P** admet une solution optimale

et **D** admet une solution optimale.

Par conséquent 2. n'est pas satisfaite.

De l'existence au volume non nul

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}' = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}\}$. Alors :

- $\mathbf{P}$ admet une solution ssi $\mathbf{P}'$ admet une solution ;
- Si $\mathbf{P}'$ admet une solution alors le volume de l'espace des solutions est borné inférieurement par $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}})^n$.

Preuve. Une solution de $\mathbf{P}$ est une solution de $\mathbf{P}'$.

- Supposons que $\mathbf{P}$ n'admette pas de solution. Alors d'après la dualité, $\{y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot b = -1\}$ admet une solution et donc une solution bornée par $B_{\mathbf{P}}$.

  Soit $\tilde{y}$ cette solution, elle vérifie : $\tilde{y} \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}) \leq -1 + \frac{1}{2} < 0$.

  $\tilde{y}' = \frac{1}{|\tilde{y} \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1})|}\tilde{y}$ est une solution de $\{y \geq 0 \wedge yA = 0 \wedge y \cdot (b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P}}}\vec{1}) = -1\}$

  ce qui implique par dualité que $\mathbf{P}'$ n'admet pas de solution.
- Supposons que $\mathbf{P}'$ (et donc $\mathbf{P}$) admette une solution et soit $\tilde{x}$ une solution de $\mathbf{P}$. Alors l'hypercube $\{x' \mid \|x' - \tilde{x}\|_\infty \leq \frac{1}{2n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}}\}$ de volume $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P}} B_{\mathbf{P}}})^n$ est contenu dans l'espace des solutions de $\mathbf{P}'$.

Simplexe

Un *simplexe* de dimension n est l'enveloppe convexe de $n+1$ points de $\mathbb{R}^n$ de volume non nul. Le *centre* du simplexe est l'isobarycentre des points.

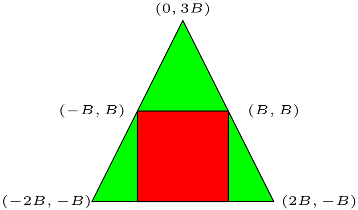
Les simplexes de dimension 2 sont les triangles.

Soit B un réel positif et soit $\mathcal{S}_n^B$ le simplexe de dimension $n \geq 1$ défini par :

- $v_n^0 = (-2^{n-1}B, \ldots, -2B, -B)$ et $v_n^1 = (2^{n-1}B, \ldots, -2B, -B)$;
- pour tout $i \geq 2$,
  1. pour tout $j < i$, $v_n^i[j] = 0$;
  2. $v_n^i[i] = 3 \cdot 2^{n-i}B$;
  3. pour tout $j > i$, $v_n^i[j] = -2^{n-j}B$.

Observations. *(On identifie $\mathbb{R}^{n-1}$ à $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$)*

- Pour tout $i \leq n$, $v_n^i = 2v_{n-1}^i + (0, \ldots, 0, -B)$ et $v_n^n = (0, \ldots, 0, 3B)$.
- D'où $\mathcal{S}_n^B$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}_{n-1}^{2B} + (0, \ldots, 0, -B)$ et $(0, \ldots, 0, 3B)$.



Simplexe et hypercube

$$\boxed{\{v \mid \|v\|_\infty \leq B\} \subseteq \mathcal{S}_n^B \text{ et } vol(\mathcal{S}_n^B) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} B^n.}$$

Preuve. *(par récurrence sur n)*

En dimension 1, $\{v \mid \|v\|_\infty \leq B\} = \mathcal{S}_1^B$.

En dimension n, Soit v tel que $\|v\|_\infty \leq B$.

Soit w tel que $w[j] = \frac{4B}{3B - v[n]} v[j]$ pour $j < n$ et $w[n] = -B$.

D'où pour $j < n$, $|w[j]| \leq 2|v[j]|$.

Par récurrence, w appartient à l'enveloppe convexe de $v_n^0, \ldots, v_n^{n-1}$.

D'autre part, $v = \frac{3B - v[n]}{4B} w + \frac{v[n] + B}{4B} v_n^n$. D'où $v \in \mathcal{S}_n$.

$vol(\mathcal{S}_1) = 2B$

$vol(\mathcal{S}_n) = 2^{n-1} vol(\mathcal{S}_{n-1}) 4B \int_0^1 t dt = 2^n B vol(\mathcal{S}_{n-1}) = 2^{n + \frac{n(n-1)}{2}} B^n$.

Transformation du problème

Soit $\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ et $\mathbf{P}_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b \wedge \|x\|_\infty \leq B_{\mathbf{P}}\}$.

$\mathbf{P}$ admet une solution ssi $\mathbf{P}_1$ admet une solution.

Soit $\mathbf{P}'_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P_1}}}\vec{1} \wedge \|x\|_\infty \leq B_{\mathbf{P}} + \frac{1}{2nB_{\mathbf{P_1}}}\}$.

$\mathbf{P}_1$ admet une solution ssi $\mathbf{P}'_1$ admet une solution.

De plus :

- L'ensemble des solutions de $\mathbf{P}'_1$ est contenu dans $\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}}+\frac{1}{2nB_{\mathbf{P_1}}}}$;
- Si l'ensemble des solutions de $\mathbf{P}'_1$ est non vide alors son volume est supérieur ou égal à $(\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P_1}} B_{\mathbf{P_1}}})^n$.

Schéma de l'algorithme

L'algorithme maintient un simplexe $\mathcal{S}$ contenant l'ensemble des solutions de $\mathbf{P}'_1$, initialisé à $\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}}+\frac{1}{2nB_{\mathbf{P_1}}}}$. Il teste si le centre de $\mathcal{S}$ est une solution de $\mathbf{P}'_1$.

- Si c'est le cas alors $\mathbf{P}'_1$ (et donc $\mathbf{P}$) admet une solution.
- Sinon il transforme $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}'$ tel que $\frac{vol(\mathcal{S}')}{vol(\mathcal{S})} \leq e^{-\frac{1}{3(n+1)^2}}$.

Lorsque (un majorant de) $vol(\mathcal{S}) < (\frac{1}{n^2 C_{\mathbf{P_1}} B_{\mathbf{P_1}}})^n$

alors l'algorithme s'arrête : $\mathbf{P}'_1$ (et donc $\mathbf{P}$) n'admet pas de solution.

Complexité. Le nombre d'itérations est polynomial car :

- $\log(vol(\mathcal{S}_n^{B_{\mathbf{P}}+\frac{1}{2nB_{\mathbf{P_1}}}}))$ est une quantité polynomiale ;
- $\log((n^2 C_{\mathbf{P_1}} B_{\mathbf{P_1}})^n)$ est une quantité polynomiale ;
- $3(n+1)^2$ est un polynôme.

De plus chaque itération garantit que la représentation de $\mathcal{S}$ augmente d'un nombre constant et polynomial de bits (par une troncature nécessaire).

Ce qui conduit à un algorithme en temps polynomial.

Transformation de $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}'$

Soit $\mathcal{S}$ défini par $\{v_0, \ldots, v_n\}$ et v_c son centre.

Supposons que v_c viole une contrainte de $\mathbf{P}'_1$: $d \cdot v_c > e$.

- Si $\{i \mid d \cdot v_i \leq e\} = \emptyset$ alors $\mathbf{P}'_1$ n'a pas de solution.
- Sinon soit $\ell \in \arg\min(d \cdot v_i \mid i \leq n)$.
  Si $d \cdot v_\ell = e$ alors les solutions de $\mathbf{P}'_1$ sont contenues dans $\{d \cdot x = e\}$ de volume nul. Par conséquent, $\mathbf{P}'_1$ n'a pas de solution.
- Sinon soit $\delta_i = \left(1 - \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)}\right)^{-1}$ et $\overline{\delta}_i = \lceil 2^t \delta_i \rceil 2^{-t}$
  la « troncature supérieure » de δ_i à t bits après la virgule
  avec $t = 4 + \lceil 3 \log_2(n+1) \rceil$.

Les points de $\mathcal{S}'$ sont obtenus ainsi :

$$v'_i = (1 - \overline{\delta}_i) v_\ell + \overline{\delta}_i v_i$$

Observations. v'_i se situe sur la demi-droite $\overrightarrow{v_\ell v_i}$

et v'_i est sur le segment ouvert $v_\ell v_i$ ssi $d \cdot v_c < d \cdot v_i$.

$\mathcal{S}'$ contient les solutions de $\mathbf{P}_1'$

Soit $\tilde{x}$ une solution de $\mathbf{P}_1'$. $\tilde{x} = \sum_{i \leq n} \lambda_i v_i$ avec $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i \leq n} \lambda_i = 1$.

Posons $\mu_i = \frac{\lambda_i}{\overline{\delta}_i}$ pour $i \neq \ell$ et $\mu_\ell = 1 - \sum_{i \neq \ell} \mu_i$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i \leq n} \mu_i v_i' &= \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\overline{\delta}_i}(\overline{\delta}_i v_i + (1 - \overline{\delta}_i) v_\ell) + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\overline{\delta}_i}) v_\ell \\
&= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + \sum_{i \neq \ell} (\frac{\lambda_i}{\overline{\delta}_i} - \lambda_i) v_\ell + (1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\overline{\delta}_i}) v_\ell \\
&= \sum_{i \neq \ell} \lambda_i v_i + (1 - \sum_{i \neq \ell} \lambda_i) v_\ell = \tilde{x}
\end{aligned}$$

Il reste à vérifier que $\mu_\ell \geq 0$.

$$\begin{aligned}
\mu_\ell = \quad & 1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\overline{\delta}_i} \geq & 1 - \sum_{i \neq \ell} \frac{\lambda_i}{\delta_i} \\
= \quad & 1 - \sum_{i \neq \ell} \lambda_i + \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)} = & \lambda_\ell + \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{n^2 d \cdot (v_c - v_\ell)}
\end{aligned}$$

Or $d \cdot v_c > e \geq d \cdot \tilde{x} = \sum_i \lambda_i d \cdot v_i$. Et :

$\sum_i \lambda_i d \cdot (v_c - v_i) \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{i \neq \ell} \lambda_i d \cdot (v_c - v_i) \geq -d \cdot (v_c - v_\ell) \lambda_\ell \Leftrightarrow \sum_{i \neq \ell} \lambda_i \frac{d \cdot (v_c - v_i)}{d \cdot (v_c - v_\ell)} \geq -\lambda_\ell$

Par conséquent, $\mu_\ell \geq \lambda_\ell (1 - \frac{1}{n^2}) \geq 0$.

Interlude

$$\boxed{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right) > e^{\frac{1}{2(n+1)^2}}}$$

Preuve. Pour $0 < x < 1$, on a :

- $\log(1+x) = \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i > x - \frac{x^2}{2}$;
- et $\log(1-x) = -\sum_{i\geq 1} \frac{1}{i} x^i > -x - \frac{x^2}{2(1-x)}$.

D'où :

$$\begin{aligned}
(n-1)\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) &> -\frac{n-1}{n^2} - \frac{n-1}{2n^2(n^2-1)} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2n^2(n+1)} \\
&= \frac{1}{2n(n+1)} \\
&> \frac{1}{2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

Réduction du volume (1)

$$\boxed{\frac{vol(\mathcal{S})}{vol(\mathcal{S}')} \geq e^{\frac{1}{3(n+1)^2}}}$$

Preuve. Puisque $d \cdot v_i \geq d \cdot v_\ell$, on a $\delta_i \leq (1 - \frac{1}{n^2})^{-1} = \frac{n^2}{n^2-1}$.
D'autre part, $d \cdot v_i = (n+1)d \cdot v_c - \sum_{j \neq i} d \cdot v_j \leq (n+1)d \cdot v_c - nd \cdot v_\ell$.
D'où $d \cdot v_c - d \cdot v_i \geq -n(d \cdot v_c - d \cdot v_\ell)$ et donc $\delta_i \geq (1 + \frac{1}{n})^{-1}$.
Par ailleurs, $\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i} = n - n^{-2} \frac{\sum_{i \neq \ell} d \cdot v_c - d \cdot v_i}{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell} = n + n^{-2} \frac{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell}{d \cdot v_c - d \cdot v_\ell} = n + \frac{1}{n^2}$.
D'autre part, $\frac{1}{\overline{\delta}_i} > \frac{1}{\delta_i + 2^{-t}} \geq \frac{1}{\frac{n^2}{n^2-1} + 2^{-t}} > \frac{n^2-1}{n^2(1+2^{-t})} > \frac{n^2-1}{n^2(1+2^{-t+1})}$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\overline{\delta}_i} &> \sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i (1 + \frac{2^{-t}}{\delta_i})} \\
&\geq (\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i})(1 + (1 + \frac{1}{n}) 2^{-t})^{-1} \\
&\geq (\sum_{i \neq \ell} \frac{1}{\delta_i})(1 + 2^{-t+1})^{-1}
\end{aligned}$$

Réduction du volume (2)

Cherchons un minorant du ratio $\frac{vol(\mathcal{S})}{vol(\mathcal{S}')} = \prod_{i\neq\ell} \overline{\delta}_i^{-1}$.

Ce ratio est minoré par la solution du problème suivant :

$$\min(\prod_{i\neq\ell} u_i \mid u_i \geq (1+2^{-t+1})^{-1}(1-\frac{1}{n^2}) \wedge \sum_{i\neq\ell} u_i \geq (1+2^{-t+1})^{-1}(n+\frac{1}{n^2}))$$

Ce minimum est atteint lorsque toutes les variables sauf une,

atteignent leur valeur minimale. Par conséquent, ce minimum est minoré par :

$$\begin{aligned} &(1+2^{-t+1})^{-n}(\frac{n^2-1}{n^2})^{n-1}(n+\frac{1}{n^2}-(n-1)(\frac{n^2-1}{n^2})) \\ =\ &(1+2^{-t+1})^{-n}(\frac{n^2-1}{n^2})^{n-1}\frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

$t = 4 + \lceil 3\log_2(n+1)\rceil$ implique $2^{-t+1} \leq \frac{1}{8(n+1)^3}$.

Par conséquent, $(1+2^{-t+1})^{-n} \geq e^{-n(\frac{1}{8(n+1)^3})} \geq e^{-\frac{1}{8(n+1)^2}}$.

Par application du résultat de l'interlude $\frac{vol(\mathcal{S})}{vol(\mathcal{S}')} \geq e^{\frac{1}{2(n+1)^2}-\frac{1}{8(n+1)^2}} \geq e^{\frac{1}{3(n+1)^2}}$.

Plan

Couverture par sommets

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

On cherche une *couverture* $W \subseteq V$ de cardinal minimal
telle que pour tout $\{u, v\} \in E$, $\{u, v\} \cap W \neq \emptyset$.

Ce problème peut être formalisé en un problème IP de minimisation :

$$\min \left(\sum_{u \in V} x_u \mid \forall u \in V \ x_u \in \{0, 1\} \wedge \forall \{u, v\} \in E \ x_u + x_v \geq 1 \right)$$

Considérons le problème P de programmation linéaire suivant :

$$\min \left(\sum_{u \in V} x_u \mid \forall u \in V \ x_u \in \mathbb{R}_{\geq 0} \wedge \forall \{u, v\} \in E \ x_u + x_v \geq 1 \right)$$

Soit W^* une couverture minimale et $\mathbf{x}^*$ une solution optimale de P.

On a : $\sum_{u \in V} \mathbf{x}^*_u \leq |W^*|$.

Un calcul de couverture

$X \leftarrow \mathsf{Solve(P)}$; $F \leftarrow E$; $W \leftarrow \emptyset$

While $F \neq \emptyset$

Let $\{u, v\} \in F$

If $X[u] \geq \frac{1}{2}$ **then**

$W \leftarrow W \cup \{u\}$; $F \leftarrow F \setminus \{\{u, w\}\}_{\{u,w\} \in F}$

Else

$W \leftarrow W \cup \{v\}$; $F \leftarrow F \setminus \{\{v, w\}\}_{\{v,w\} \in F}$

Return W

Correction par invariant de boucle.

$$\forall \{u, v\} \in E \setminus F \; \{u, v\} \cap W \neq \emptyset$$

Garantie de performance.

Soit $\mathbf{y}_u = \mathbf{1}_{u \in W}$

$$|W| = \sum_{u \in V} \mathbf{y}_u \leq 2 \sum_{u \in V} \mathbf{x}^*_u \leq 2|W^*|$$

Extension aux graphes pondérés

Soit $G = (V, E, c)$ un graphe non orienté pondéré avec $c : V \to \mathbb{N}$.

On cherche une couverture $W \subseteq V$ de poids $c(W) = \sum_{u \in W} c(u)$ minimal.

Ce problème peut être formalisé en un problème IP de minimisation :

$$\text{IP} := \min \left(\sum_{u \in V} c(u) x_u \mid \forall u \in V \;\; x_u \in \{0,1\} \wedge \forall \{u,v\} \in E \;\; x_u + x_v \geq 1 \right)$$

Considérons le problème P de programmation linéaire suivant :

$$\text{P} := \min \left(\sum_{u \in V} c(u) x_u \mid \forall u \in V \;\; x_u \in \mathbb{R}_{\geq 0} \wedge \forall \{u,v\} \in E \;\; x_u + x_v \geq 1 \right)$$

Soit W^* une couverture minimale et $\mathbf{x}^*$ une solution optimale de P.

On a : $\sum_{u \in V} c(u) \mathbf{x}^*_u \leq c(W^*)$.

Un calcul de couverture

$X \leftarrow$ Solve(P) ; $F \leftarrow E$; $W \leftarrow \emptyset$

While $F \neq \emptyset$

Let $\{u, v\} \in F$

If $X[u] \geq \frac{1}{2}$ **then**

$W \leftarrow W \cup \{u\}$; $F \leftarrow F \setminus \{\{u, w\}\}_{\{u,w\} \in F}$

Else

$W \leftarrow W \cup \{v\}$; $F \leftarrow F \setminus \{\{v, w\}\}_{\{v,w\} \in F}$

Return W

Correction par invariant de boucle.

$$\forall \{u, v\} \in E \setminus F \ \{u, v\} \cap W \neq \emptyset$$

Garantie de performance.

Soit $\mathbf{y}_u = \mathbf{1}_{u \in W}$

$$c(W) = \sum_{u \in V} c(u)\mathbf{y}_u \leq 2 \sum_{u \in V} c(u)\mathbf{x}^*_u \leq 2c(W^*)$$

Dualité

Soit le problème P :

$$\mathsf{P} := \min \left(\sum_{u \in V} c(u) x_u \mid \forall u \in V \ x_u \in \mathbb{R}_{\geq 0} \wedge \forall \{u, v\} \in E \ x_u + x_v \geq 1 \right)$$

Alors son dual D est défini par :

$$\mathsf{D} := \max \left(\sum_{\{u,v\} \in E} y_{u,v} \mid \forall \{u, v\} \in E \ y_{u,v} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \wedge \forall u \in V \sum_{\{u,v\} \in E} y_{u,v} \leq c(u) \right)$$

Un autre calcul de couverture

$d \leftarrow \mathbf{0}$; $Y \leftarrow \mathbf{0}$; $F \leftarrow E$
While $F \neq \emptyset$
  Let $\{u, v\} \in F$
  If $d[u] < c[u]$ **and** $d[v] < c[v]$ **then**
    $Y[\{u, v\}] \leftarrow \min(c[u] - d[u], c[v] - d[v])$
    $d[u] \leftarrow d[u] + Y[\{u, v\}]$; $d[v] \leftarrow d[v] + Y[\{u, v\}]$
$W \leftarrow \{u \in V \mid d[u] = c[u]\}$; **Return** W

Correction par invariant de boucle. $\forall \{u, v\} \in E \setminus F \; d[u] = c[u] \vee d[v] = c[v]$

Garantie de performance.
Y est une solution de D : $\forall u \in V \;\; \sum_{\{u,v\} \in E} Y[\{u, v\}] = d(u) \leq c(u)$.
D'où : $\sum_{\{u,v\} \in E} Y[\{u, v\}] \leq \sum_{u \in V} c(u)\mathbf{x}^*_u \leq c(W^*)$.

$$\begin{aligned} \sum_{u \in W} c(u) = {} & \sum_{u \in W} d(u) = & \sum_{u \in W} \sum_{\{u,v\}} Y[\{u, v\}] \\ \leq {} & 2 \sum_{\{u,v\} \in E} Y[\{u, v\}] \leq & 2c(W^*) \end{aligned}$$