TD 2 :
Recombinaisons et recherche en espace constant

1 Recombinaison de mots

On considère des mots $u, v, w, \ldots$ sur un alphabet fini $\Sigma = \{a, b, \ldots\}$.

On note $u \circlearrowleft v$ quand on peut passer de u à v par une rotation des lettres (i.e. u se décompose en xy et v en yx où x et y sont eux-mêmes des mots). Par exemple, *abcad* et *cadab* sont des rotations circulaires l'un de l'autre.

Question 1 : Donner un algorithme qui teste si $u \circlearrowleft v$ en temps $O(|u|)$.

On note $\widetilde{u}$ le mot obtenu en retournant u. Par exemple, $\widetilde{abcc} = ccba$.

Définition 1 (Recombinaison) *On dit qu'un mot u se recombine en v, noté $u \sim v$, si u peut se décomposer en $u = u_1u_2u_3$ de sorte que $v = u_1\widetilde{u_2}u_3$, c.-à-d. que v est obtenu en retournant un facteur quelque part dans u.*

Ce genre de transformation apparaît en biologie, quand des gènes sont copiés.

Question 2 : Montrez que $au \sim av$ ssi $u \sim v$ pour $a \in \Sigma$. Qu'en déduisez-vous de la relation entre $ua \sim va$ et $u \sim v$?

Question 3 : En déduire un algorithme efficace qui teste, étant donnés deux mots u et v, si $u \sim v$. Vous établirez sa complexité en fonction de la taille n des mots.

Soit $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ deux relations. La relation $\mathcal{R}\mathcal{R}'$ est définie par $u\mathcal{R}\mathcal{R}'v$ ssi $\exists w\ u\mathcal{R}w \wedge w\mathcal{R}'v$.

Question 4 : Montrer que $u \sim \widetilde{v} \Rightarrow u \circlearrowleft\!\sim\!\circlearrowleft v$.

Question 5 : Montrer que $u \sim\!\circlearrowleft v \Rightarrow u \circlearrowleft\!\sim v$ ou $u \circlearrowleft\!\sim \widetilde{v}$.

On étend la notion de recombinaison par la définition suivante : $u \approx v$ ssi il existe deux mots u' et v' tels que $u \circlearrowleft u' \sim v' \circlearrowleft v$ (autrement dit, $u \approx v$ ssi $u \circlearrowleft\!\sim\!\circlearrowleft v$).

Question 6 : Proposer un algorithme efficace qui teste, étant donnés deux mots u et v, si $u \approx v$. Vous établirez sa complexité en fonction de la taille n des mots. *Indication :* Commencer par montrer que $u \approx v$ ssi $u \circlearrowleft\!\sim v$ ou $u \circlearrowleft\!\sim \widetilde{v}$.

2 Recherche en espace constant

2.1 Recherche d'un motif auto-maximal

On fixe un ordre total sur l'alphabet Σ, et on note $MaxSuf(w)$ le suffixe maximal de w au sens de l'ordre lexicographique. Le mot w est dit *auto-maximal* si $MaxSuf(w) = w$.

Définition 2 (Période) *On dit que $p \in \{1, \ldots, |u|\}$ est une période d'un mot $u \in \Sigma^*$ si pour tout $i \in \{1, \ldots, |u| - p\}, u[i] = u[i + p]$. On note $Period(u)$ la plus petite période de u.*

Lors du TD précédent, nous avons vu que $Period(w) = |w| - \pi_w(|w|)$.

Question 7 : Montrer qu'il existe des mots qui ne sont pas auto-maximaux, peu importe l'ordre choisi sur l'alphabet.

Question 8 : Montrer que si un mot est auto-maximal, alors tous ses préfixes le sont.

On considère l'algorithme suivant :

```
periode_naive(w,j) :=
  pe := 1;
  pour i de 2 à j faire
    si w[i] ≠ w[i − pe] alors pe := i;
  retourner pe;
```

Question 9 : Montrer que, lorsque w est auto-maximal, periode_naive(w,j) calcule bien $Period(w[1, j])$. *Indication :* Proposer l'invariant de boucle adéquat et le démontrer en utilisant le lemme suivant : pour $p = Period(w[1, i - 1])$, si $w[i] \neq w[i - p]$ alors $w[i] < w[i - p]$ et $Period(w[1, i]) \geq i$.

Question 10 : On suppose que le motif w à rechercher est auto-maximal. Adapter l'algorithme de Morris-Pratt pour le faire fonctionner en espace mémoire "constant", plus exactement, le nombre de variables codant des entiers doit rester constant (ce qui correspond en réalité à un espace logarithmique). Montrer que la complexité en temps reste linéaire.

2.2 Recherche de texte en espace constant

On suppose connue la décomposition $w = u \cdot v$ avec $v = MaxSuf(w)$, et on cherche les occurrences de w à l'intérieur d'un texte quelconque T.

Question 11 : Si v apparaît avec un décalage de i dans T, montrer que u ne peut apparaître avec un décalage de j dans T, pour tout $j \in \{i - |u| + 1, i - |u| + 2, \ldots, i\}$.

Question 12 : (DM) En déduire un algorithme de recherche de w dans T en temps linéaire et espace constant.