TD 7 : Approximation pour le problème de couverture

1 Algorithmes naïfs

Soit $(G_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ une famille de graphes bipartis [1] non-orientés telle que, pour tout r, le graphe $G_r = (V, E)$ vérifie les contraintes suivantes :

— $V = L \sqcup R$ et $R = \bigsqcup_{1\leq i\leq r} R_i$. De plus, $|L| = r$ et $\forall i$: $|R_i| = \lfloor r/i \rfloor$.

— Pour tout i, chaque sommet de R_i est connecté à i sommets de L et aucun sommet de L n'est connecté à plus d'un sommet de R_i.

— Il n'y a pas d'autre arête.

La figure 1 illustre le cas $r = 4$.

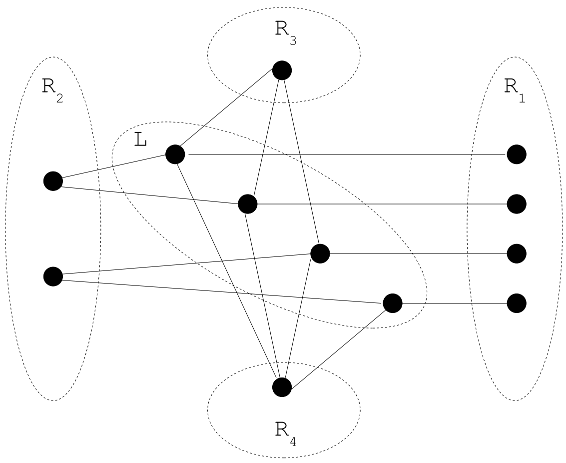

FIGURE 1 – Le graphe G_4 de la famille $(G_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$

Question 1 : Quel est le degré maximum d'un sommet de L ? Donner l'ordre de grandeur du nombre de sommets de R. Donner une couverture de sommets de taille minimale.

Algorithme `naïf` : Soit l'algorithme suivant de calcul de couverture de sommets pour un graphe $G = (V, E)$.

— On initialise le sous-ensemble C à vide.

— On itère la procédure suivante : On cherche une arête $\{u, v\}$ t.q. $\{u, v\} \cap C = \emptyset$. S'il n'en existe pas alors on renvoie C qui est la couverture recherchée. Sinon on choisit arbitrairement un sommet $z \in \{u, v\}$ qu'on ajoute à C et on continue.

Question 2 : Expliquez comment l'algorithme `naïf` peut renvoyer R comme résultat lorsqu'il est appliqué à G_r. En déduire que sa garantie de performance appartient à $\Omega(\log r)$.

1. Rappel : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ est biparti si $V = L \sqcup R$ et $\forall e \in E$ $e \cap L \neq \emptyset \wedge e \cap R \neq \emptyset$.

Algorithme `moinsnaïf` : Soit l'algorithme suivant de calcul de couverture de sommets pour un graphe $G = (V, E)$.

— On initialise le sous-ensemble de sommets C à vide et le sous-ensemble d'arêtes E' à E.

— On itère la procédure suivante : Si E' est vide alors on renvoie C qui est la couverture recherchée. Sinon on choisit un sommet u de degré maximal dans le graphe $G' = (V, E')$ qu'on ajoute à C. Puis on supprime de E' toutes les arêtes adjacentes à u et on continue.

Question 3 : Expliquez comment l'algorithme `moinsnaïf` peut renvoyer R comme résultat lorsqu'il est appliqué à G_r.

On s'intéresse maintenant au problème de la couverture des sommets de poids minimal. On se donne un graphe $G = (V, E)$ et une pondération $w : V \mapsto \mathbb{N}^*$. Il s'agit de trouver une couverture de sommets C t.q. $\sum_{v \in C} w(v)$ soit minimal. On notera le graphe pondéré $G = (V, E, w)$.

Question 4 : Montrer que le problème de décision sous-jacent est NP-complet (par réduction de 3-SAT).

Algorithme `encorenaïf` : Soit l'algorithme suivant de calcul de couverture de sommets pour un graphe pondéré $G = (V, E, w)$.

— On trie les sommets par poids croissant, on initialise le sous-ensemble C à vide.

— On itère la procédure suivante : On cherche dans la liste triée le premier sommet u t.q. il existe une arête $\{u, v\}$ avec $\{u, v\} \cap C = \emptyset$. S'il n'en existe pas alors on renvoie C qui est la couverture recherchée. Sinon on ajoute u à C et on continue.

Soit $G = (V, E)$ avec $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ et $E = \{\{v_0, v_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ (autrement dit une “étoile” de centre v_0).

Question 5 : Proposer une pondération des sommets de ce graphe telle que l'algorithme `encorenaïf` renvoie une couverture de taille n.

2 Couverture dans un graphe biparti

On suppose dans cette partie que le graphe pondéré $G = (V, E, w)$ est biparti avec $V = L \sqcup R$.

On construit un graphe **orienté** $G' = (V', E')$ dont les arcs sont pondérés par une fonction w' de la façon suivante :

— $V' = V \sqcup \{s, t\}$. Le sommet s est la source et le sommet t est le puits.

— $E' = \{(s, u) \mid u \in L\} \cup \{(v, t) \mid v \in R\} \cup \{(u, v) \mid u \in L \wedge v \in R \wedge \{u, v\} \in E\}$.

— $\forall u \in L\ w'(s, u) = w(u) \wedge \forall v \in R\ w'(v, t) = w(v)$
$\wedge \forall \{u, v\} \in E\ w'(u, v) = M$ avec $M = 1 + \sum_{v \in R} w(v)$.

Une s-t coupe de G' est une partition (S, T) de V' avec $s \in S$ et $t \in T$. Le poids d'une s-t coupe est défini par $P(S, T) = \sum_{u \in S, v \in T, (u,v) \in E'} w'(u, v)$.

Question 6 : Soit une s-t coupe de G', (S, T), de poids minimal. Montrer que :

1. $\forall u \in L\ \forall v \in R\ (\{u, v\} \in E \wedge u \in S) \Rightarrow v \in S$.
2. Soient $L' = L \cap T$ et $R' = R \cap S$. Alors $R' \cup L'$ est une couverture de poids minimal de G.

On rappelle qu'un flot dans le graphe orienté G' est une fonction $f : E' \mapsto \mathbb{N}$ telle que $f(u, v) \leq w'(u, v)$ pour tout $(u, v) \in E'$ et $\sum_{\{u \mid (u,v) \in E'\}} f(u, v) = \sum_{\{u \mid (v,u) \in E'\}} f(v, u)$ pour tout sommet $v \in V' \setminus \{s, t\}$. La valeur d'un flot, notée $|f|$, est définie par $\sum_{\{v \mid (s,v) \in E'\}} f(s, v)$.

Question 7 : Montrer le lien entre le calcul d'un flot maximal et une s-t coupe de poids minimal. En déduire un algorithme en temps polynomial pour la couverture de sommets de poids minimal dans un graphe biparti.

3 Algorithme d'approximation

Soit S un ensemble, un multi-ensemble B de S est une fonction de S dans $\mathbb{N}$. Lorsque B est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a affaire à un sous-ensemble. On note $B = \sum_{s \in S} B(s) \cdot s$ et on omet les coefficients unitaires et les termes de coefficient nul. Ainsi si $S = \{x, y, z\}$, $2 \cdot x + y$ désigne le multi-ensemble $2 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z$. On étend l'intersection aux multi-ensembles par $B \cap B' = \sum_{s \in S} \min(B(s), B'(s)) \cdot s$ et l'inclusion par $B \subseteq B'$ ssi $\forall s \in S\ B(s) \leq B'(s)$. On note $\mathrm{Supp}(B) = \{s \mid B(s) > 0\}$ le support (éléments de S) de B.

Soit $G = (V, E, w)$ un graphe pondéré, une *double couverture* C de G est un multi-ensemble de V t.q. $\forall \{u, v\} \in E \colon C(u) + C(v) \geq 2$. Le poids d'une double couverture C est défini par $\sum_{v \in V} C(v) \cdot w(v)$. Dans la suite, on cherche des doubles couvertures de poids minimal.

Question 8 : Montrer que si C est une double couverture de poids minimal alors $\forall v \colon C(v) \leq 2$.

Dans la suite, on se restreint donc aux doubles couvertures C t.q. $\forall v \colon C(v) \leq 2$.

Question 9 : Soit C une double couverture de G, montrez que $\mathrm{Supp}(C)$ est une couverture de G.

Question 10 : Soient C une double couverture de G de poids minimal p et C' une couverture de G de poids minimal p'. Montrez que $p \leq 2p'$.

Les questions suivantes sont laissées comme DM.
Soit $G = (V, E, w)$ un graphe pondéré, on définit le graphe biparti pondéré $G' = (V', E', w')$ ainsi :

- $V' = L \sqcup R$ avec $L = \{u^L \mid u \in V\}$ et $R = \{u^R \mid u \in V\}$.
- $E' = \{\{u^L, v^R\} \mid \{u, v\} \in E\} \sqcup \{\{u^R, v^L\} \mid \{u, v\} \in E\}$.
- $\forall u \in V\ w'(u^L) = w'(u^R) = w(u)$.

Question 11 : Montrer qu'une couverture C' de G' peut être transformée en une double couverture C de G de même poids.

Question 12 : Montrer qu'une double couverture C de G peut être transformée en une couverture C' de G' de même poids.

Question 13 : Proposer un algorithme en temps polynomial pour la couverture de sommets de poids minimal qui fournisse une garantie de performance de 2.