Langages formels : monoïdes et morphismes

Stéphane Le Roux stephane.le_roux@ens-paris-saclay.fr

ENS Paris-Saclay

2023-2024

Relation d'équivalence, rappel du cours de maths discrètes

Soient E, F deux ensembles et $f : E \to F$.

- On note $x \sim_f y$ si $f(x) = f(y)$.
- $\sim_f$ est une relation d'équivalence.
- Soit $\sim$ une relation d'équivalence. On dit que $\sim$ et f sont compatibles si $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$.
- $\sim$ et f sont compatibles ssi $\sim \subseteq \sim_f$.
  - Si $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$ et $x \sim y$, alors $f(x) = f(y)$, donc $x \sim_f y$.
  - Si $\sim \subseteq \sim_f$ et $x \sim y$, alors $x \sim_f y$, donc $f(x) = f(y)$.

Congruence de monoïde, rappel du cours de maths discrètes

Definition

Soit M un monoïde. Une relation d'équivalence $\sim \subseteq M \times M$ est une congruence si $\forall u, v \in M, u \sim v \Rightarrow \forall x, y \in M, xuy \sim xvy$

Lemma

Une relation d'équivalence $\sim$ sur un monoïde M est une congruence ssi $\forall x, x', y, y' \in M, x \sim x' \wedge y \sim y' \Rightarrow xy \sim x'y'$.
Cela structure $M/\sim$ en monoïde via $[x][y] = [xy]$.

Lemma

Soit $\phi : M \to N$ un morphisme de monoïdes.

- *$\sim_\phi$ est une congruence*
- *Une congruence $\sim$ est compatible avec ϕ ssi $\sim \subseteq \sim_\phi$*
- *De plus $|M/\sim_\phi| = |\phi[M]| \leq |N|$et quand N est fini on a égalité ssi ϕ est surjective.*

Relation d'équivalence et quotient de quotient

Proposition

Soit E un ensemble et $\sim_1 \subseteq \sim_2$ deux relations d'équivalence sur E. Soit $\sim_3 \subseteq (E/\sim_1) \times (E/\sim_1)$ définie par $[u]_1 \sim_3 [v]_1$ s'il existe $u', v' \in E$ tels que $u \sim_1 u' \sim_2 v' \sim_1 v$. Alors

1. $[u]_1 \sim_3 [v]_1$ ssi $u \sim_2 v$.
2. $\sim_3$ est une relation d'équivalence.
3. La relation $\{([[u]_1]_3, [u]_2) \mid u \in E\}$ est une fonction bijective.

1. Si $u \sim_2 v$ alors on a $u \sim_1 u \sim_2 v \sim_1 v$, donc $[u]_1 \sim_3 [v]_1$. Réciproquement, supposons que $[u]_1 \sim_3 [v]_1$, donc il existe $u', v' \in E$ tels que $u \sim_1 u' \sim_2 v' \sim_1 v$. Or $\sim_1 \subseteq \sim_2$, donc $u \sim_2 v$.
2.
   - $u \sim_2 u$ donc $[u]_1 \sim_3 [u]_1$.
   - Si $[u]_1 \sim_3 [v]_1$, alors $u \sim_2 v$, donc $v \sim_2 u$, donc $[v]_1 \sim_3 [u]_1$.
   - De manière similaire pour la transitivité.
3. Par 2) on peut écrire $[[u]_1]_3$, et par 1) on obtient l'aspect fonctionnel et bijectif.

Congruence et quotient de quotient

Proposition

Soit M un monoïde et $\sim_1 \subseteq \sim_2$ deux congruences sur M. Soit $\sim_3 \subseteq (E/\sim_1) \times (E/\sim_1)$ définie par $[u]_1 \sim_3 [v]_1$ s'il existe $u', v' \in M$ tels que $u \sim_1 u' \sim_2 v' \sim_1 v$. Alors

1. $[u]_1 \sim_3 [v]_1$ ssi $u \sim_2 v$.
2. $\sim_3$ est une congruence.
3. La relation $\{([[u]_1]_3, [u]_2) \mid u \in M\}$ est un isomorphisme de monoïde.

1. Par la diapo précédente.
2. Par la diapo précédente, c'est une relation d'équivalence. Soient $[u]_1 \sim_3 [v]_1$ et $x, y \in E$. Alors $u \sim_2 v$, donc $xuy \sim_2 xvy$, donc $[xuy]_1 \sim_3 [xvy]_1$ donc $[x]_1[u]_1[y]_1 \sim_3 [x]_1[v]_1[y]_1$.
3. Par la diapo précédente, c'est une bijection. De plus
   - $[[e_M]_1]_3$, l'élément neutre de $(M/\sim_1)/\sim_3$, est envoyé sur $[e_M]_2$, l'élément neutre de $M/\sim_2$.
   - $[[u]_1]_3[[v]_1]_3 = [[u]_1[v]_1]_3 = [[uv]_1]_3$ est envoyé sur $[uv]_2 = [u]_2[v]_2$.

Relation d'équivalence et langage compatibles

Définition

On dit qu'une relation d'équivalence $\sim$ sur Σ^* est compatible avec $L \subseteq \Sigma^*$ si elle l'est avec la fonction caractéristique de L.

Lemme

Soient une relation d'équivalence $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ et un langage $L \subseteq \Sigma^*$. Les quatre assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\sim$ est compatible avec L.
2. L est une union de classes d'équivalence de $\sim$.
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, (x \sim y \land x \in L) \Rightarrow y \in L$
4. $\forall x, y \in \Sigma^*, x \sim y \Rightarrow (x \in L \Leftrightarrow y \in L)$

Remarques :

- L'égalité est compatible avec tout langage.
- La relation universelle est compatible avec Σ^* et $\emptyset$ uniquement.

Reconnaissance d'un langage par un morphisme

Définition

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ et $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme de monoïde.

- Si $L = \phi^{-1}[\phi[L]]$ on dit que L est reconnu par le morphisme ϕ, ou reconnu par M, ou reconnu par monoïde.
- Si de plus M est fini, on dit que L est reconnu par monoïde fini.

Remarque

Tout morphisme $\phi : \Sigma^* \to M$ reconnaît $\emptyset$ et Σ^*, car $\phi^{-1}[\phi[\emptyset]] = \emptyset$ et $\phi^{-1}[\phi[\Sigma^*]] = \Sigma^*$ pour des raisons purement ensemblistes.

Reconnaissance d'un langage par un morphisme (II)

Lemme

Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\phi^{-1}[\phi[L]] \subseteq L$
2. ϕ reconnait L, i.e. $L = \phi^{-1}[\phi[L]]$
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, (\phi(x) = \phi(y) \wedge x \in L) \Rightarrow y \in L$
4. $\sim_\phi$ et L sont compatibles

- $1 \Rightarrow 2$: $L \subseteq \phi^{-1}[\phi[L]]$ pour des raisons purement ensemblistes.
- $2 \Rightarrow 3$: Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$ et $x \in L$. Alors $y \in \phi^{-1}[\phi(x)] \subseteq \phi^{-1}[\phi[L]]$, donc $y \in L$.
- $3 \Rightarrow 4$: Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que $x \sim_\phi y$ et $x \in L$. Alors $\phi(x) = \phi(y)$, donc $y \in L$.
- $4 \Rightarrow 1$: Soit $y \in \phi^{-1}[\phi[L]]$. Donc $\phi(y) \in \phi[L]$. Soit donc $x \in L$ tel que $\phi(y) = \phi(x)$, i.e. $y \sim_\phi x$. Donc $y \in L$.

Reconnaissance d'un langage par un morphisme (III)

Rappel : Soit $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme de monoïde. Soit $\sim_\phi$ la congruence définie par $x \sim_\phi y$ ssi $\phi(x) = \phi(y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\phi^{-1}[\phi[L]] \subseteq L$
2. ϕ reconnait L, i.e. $L = \phi^{-1}[\phi[L]]$
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, (\phi(x) = \phi(y) \wedge x \in L) \Rightarrow y \in L$
4. $\sim_\phi$ et L sont compatibles

Corollaire

$2^{|\phi[\Sigma^*]|}$, i.e. $2^{|\Sigma^*/\sim_\phi|}$ langages sont reconnus par ϕ.

Preuve

$\sim_\phi$ et L sont compatibles ssi chaque classe d'équivalence de $\sim_\phi$ soit est incluse dans L, soit n'intersecte pas L. Donc ces langages L sont en bijection avec les fonctions caractéristiques de $\Sigma^*/\sim_\phi$.

Reconnaissance d'un langage par un morphisme (IV)

Rappel : Soit $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme de monoïde. Soit $\sim_\phi$ la congruence définie par $x \sim_\phi y$ ssi $\phi(x) = \phi(y)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $\phi^{-1}[\phi[L]] \subseteq L$
2. ϕ reconnait L, i.e. $L = \phi^{-1}[\phi[L]]$
3. $\forall x, y \in \Sigma^*, (\phi(x) = \phi(y) \wedge x \in L) \Rightarrow y \in L$
4. $\sim_\phi$ et L sont compatibles

Lemme

$\phi : \Sigma^* \to M$ reconnaît L ssi $\phi|^{\phi[\Sigma^*]} : \Sigma^* \to \phi[\Sigma^*]$ reconnaît L.

Preuve

- $\phi|^{\phi[\Sigma^*]}$ est bien un morphisme de monoïde.
- $\forall x \in \Sigma^*, \phi(x) = \phi|^{\phi[\Sigma^*]}(x)$, donc $\phi|^{\phi[\Sigma^*]}(x) = \phi|^{\phi[\Sigma^*]}(y)$ ssi $\phi(x) = \phi(y)$. On conclut par le point 3 ci-dessus.

Clôture par passage au complémentaire

Lemme

Si $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnu par monoïde fini, $\Sigma^* \setminus L$ aussi.

Preuve

Soit $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme dans M fini tel que L est une union de classes de $\sim_\phi$. Alors $\Sigma^* \setminus L$ est l'union des classes restantes de $\sim_\phi$.

Produit cartésien de morphismes

Lemme

Soient M_1, M_2 deux monoïdes et pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\phi_i : \Sigma^* \to M_i$ un morphisme.

1. L'application $\phi_1 \times \phi_2 : \Sigma^* \to M_1 \times M_2$ tq $\phi_1 \times \phi_2(x) := (\phi_1(x), \phi_2(x))$ est un morphisme.
2. Si $\phi_1 \times \phi_2$ reconnaît L, alors $\phi_2 \times \phi_1$ aussi.
3. Si ϕ_i reconnaît $L \subseteq \Sigma^*$, alors $\phi_1 \times \phi_2$ aussi.

1. Facile.
2. Soient $u, v \in \Sigma^*$ tels que $\phi_2 \times \phi_1(u) = \phi_2 \times \phi_1(v)$ et $u \in L$. Alors $\phi_2(u) = \phi_2(v)$ et $\phi_1(u) = \phi_1(v)$. Donc $\phi_1 \times \phi_2(u) = \phi_1 \times \phi_2(v)$. Or $u \in L$, donc $v \in L$.
3. Supposons que ϕ_1 reconnaît L. Alors $\forall u, v \in \Sigma^*, (\phi_1(u) = \phi_1(v) \wedge u \in L) \Rightarrow v \in L$. Soit $u, v \in \Sigma^*$ tels que $\phi_1 \times \phi_2(u) = \phi_1 \times \phi_2(v)$ et $u \in L$. Alors $\phi_1(u) = \phi_1(v)$ et $u \in L$, donc $v \in L$.

Clôture par union et intersection

Lemme

Pour $i \in \{1, 2\}$ soient $L_i \subseteq \Sigma^*$ reconnu par $\phi_i : \Sigma^* \to M_i$. Alors $\phi_1 \times \phi_2$ reconnaît $L_1 \cap L_2$ et $L_1 \cup L_2$.

Preuve

Soit $x, y \in \Sigma^*$ tels que $\phi_1 \times \phi_2(x) = \phi_1 \times \phi_2(y)$, i.e. $\phi_1(x) = \phi_1(y)$ et $\phi_2(x) = \phi_2(y)$.

1. Supposons que $x \in L_1 \cap L_2$. Alors $\phi_1(x) = \phi_1(y)$ et $x \in L_1$ implique $y \in L_1$. De même $y \in L_2$, donc $y \in L_1 \cap L_2$.
2. Supposons que $x \in L_1 \cup L_2$. Soit $i \in \{1, 2\}$ tel que $x \in L_i$. Alors $\phi_i(x) = \phi_i(y)$ et $x \in L_i$ implique $y \in L_i$. Donc $y \in L_1 \cup L_2$.

Clôture par pré-image par morphisme

Lemme

Soient $L \subseteq B^*$ reconnu par $\phi : B^* \to M$ et $\theta : A^* \to B^*$ un morphisme. Alors $\theta^{-1}[L]$ est reconnu par $\phi \circ \theta$.

Preuve

$\phi : B^* \to M$ reconnaît L, donc
$\forall x, y \in B^*, (\phi(x) = \phi(y) \wedge x \in L) \Rightarrow y \in L$. Mq $\phi \circ \theta$ reconnaît $\theta^{-1}[L]$.
Soient $u, v \in A^*$ tels que $\phi \circ \theta(u) = \phi \circ \theta(v)$ et $u \in \theta^{-1}[L]$. Alors $\theta(u) \in L$, donc $\theta(v) \in L$, i.e. $v \in \theta^{-1}[L]$.

Corollary

Soient $L \subseteq B^*$ reconnu par monoïde fini et $\theta : A^* \to B^*$ un morphisme. Alors $\theta^{-1}[L]$ est reconnu par monoïde fini.

Clôture par pseudo-quotient

Lemme

Soient $L \subseteq \Sigma^*$ reconnu par $\phi : \Sigma^* \to M$ et $K \subseteq \Sigma^*$. Alors $K^{-1}L$ et LK^{-1} sont aussi reconnus par ϕ.

Preuve (pour $K^{-1}L$)

Soient $x, y \in \Sigma^*$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$ et $x \in K^{-1}L$. Montrons que $y \in K^{-1}L$. Par définition $K^{-1}L := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in K, vu \in L\}$. Par hypothèse $x \in K^{-1}L$, soit donc $v \in K$ tel que $vx \in L$. Alors $\phi(vx) = \phi(v)\phi(x) = \phi(v)\phi(y) = \phi(vy)$. Par hypothèse $\forall x, y \in \Sigma^*, (\phi(x) = \phi(y) \wedge x \in L) \Rightarrow y \in L$. Donc $vy \in L$, donc $y \in K^{-1}L$.

Loi miroir (vers la clôture par miroir)

Loi miroir

Soit E un ensemble et $\cdot : E \times E \to E$ une loi de composition interne. La loi miroir $\bar{\cdot}$ est définie par $x \bar{\cdot} y := y \cdot x$ pour tout $x, y \in E$.

Lemme

1. Un élément neutre pour $\cdot$ l'est aussi pour $\bar{\cdot}$
2. Si $\cdot$ est associative, alors $\bar{\cdot}$ aussi
3. Si $\cdot$ est commutative, alors $\bar{\cdot} = \cdot$

Preuve

1. Si $e \cdot x = x \cdot e = x$, alors $e \bar{\cdot} x = x \cdot e = x$ et $x \bar{\cdot} e = e \cdot x = x$
2. $x \bar{\cdot} (y \bar{\cdot} z) = (z \cdot y) \cdot x = z \cdot (y \cdot x) = (x \bar{\cdot} y) \bar{\cdot} z$
3. $x \bar{\cdot} y = y \cdot x = x \cdot y$.

Corollaire

Si $(M, \cdot, e)$ est un monoïde, alors $(M, \bar{\cdot}, e)$ aussi.

Morphisme miroir

Morphisme miroir

Soit $\phi : \Sigma^* \to (M, \cdot, e)$ un morphisme de monoïde. Son morphisme miroir $\overline{\phi} : \Sigma^* \to (M, \bar{\cdot}, e)$ est défini par $\forall a \in \Sigma, \overline{\phi}(a) = \phi(a)$. (Notons que $\overline{\phi}$ est bien défini car défini sur la base de Σ^*.)

Lemme

Soit $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme de monoïde. Alors $\forall u \in \Sigma^* \overline{\phi}(u) = \phi(\overline{u})$.

Preuve

Montrons $\forall u \in \Sigma^* \overline{\phi}(u) = \phi(\overline{u})$ par récurrence sur u.

- $\overline{\phi}(\epsilon) = e$ et $\phi(\epsilon) = e$ par définition de morphisme. Donc $\overline{\phi}(\epsilon) = \phi(\epsilon) = \phi(\overline{\epsilon})$.
- $\overline{\phi}(ua) = \overline{\phi}(u) \bar{\cdot} \overline{\phi}(a) = \overline{\phi}(a) \cdot \overline{\phi}(u) = \phi(a) \cdot \phi(\overline{u}) = \phi(a\overline{u}) = \phi(\overline{ua})$

Clôture par miroir

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ reconnu par $\phi : \Sigma^* \to (M, \cdot, e)$. Alors $\overline{L}$ est reconnu par $\overline{\phi}$.

Preuve

Par hypothèse $\forall u, v \in \Sigma^*, (\phi(u) = \phi(v) \wedge u \in L) \Rightarrow v \in L$. Soit $u, v \in \Sigma^*$ tels que $\overline{\phi}(u) = \overline{\phi}(v)$ et $u \in \overline{L}$. Montrons que $v \in \overline{L}$. On a $\overline{\phi}(u) = \phi(\overline{u})$ et $\overline{\phi}(v) = \phi(\overline{v})$, donc $\phi(\overline{u}) = \phi(\overline{v})$. Or $\overline{u} \in L$, donc $\overline{v} \in L$, donc $v \in \overline{L}$.

Reconnaissance par morphisme particulier

Vers la clôture par concaténation

Lemme

1. $N := (\{0,1\}, \max, 0)$ est un monoïde (commutatif).
2. $\lambda : \Sigma^* \to N$ telle que $\lambda(u) = 0$ ssi $u = \epsilon$ est un morphisme.
3. Soit $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme. Si $\phi \times \lambda(u) = (e_M, 0)$, alors $u = \epsilon$.

Lemme

Tout langage reconnu par morphisme est aussi reconnu par un morphisme dans un monoïde de taille double et dont seul le neutre est envoyé sur le neutre.

Preuve

Soit $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme reconnaissant $L \subseteq \Sigma^*$. Alors $\phi \times \lambda$ est un témoin.

Construction de monoïde

Lemme

Soient M, N deux monoïdes. $(P, *, e_P)$ défini ci-dessous est un monoïde.

- $P := \mathcal{P}(M \times N)$
- $\forall X, Y \in P, X * Y := \{(mm', n') \mid (m, e_N) \in X \wedge (m', n') \in Y\} \cup \{(m, nn') \mid (m, n) \in X \wedge (e_M, n') \in Y\}$
- $e_P := \{(e_M, e_N)\}$

Preuve

- Mq e_P est neutre : $X * e_P = \{(mm', n') \mid (m, e_N) \in X \wedge (m', n') = (e_M, e_N)\} \cup \{(m, nn') \mid (m, n) \in X \wedge (e_M, n') = (e_M, e_N)\} = \{(m, e_N) \mid (m, e_N) \in X\} \cup \{(m, n) \mid (m, n) \in X\} = X = e_P * X$
- Mq $*$ est associative : $X * (Y * Z) = \cdots = (X * Y) * Z$.

Clôture par concaténation

Lemme

Si $L, K \subseteq \Sigma^*$ sont reconnus par monoïde fini, $L \cdot K$ aussi.

Preuve (début) : Soient $\phi : \Sigma^* \to M$ et $\theta : \Sigma^* \to N$ reconnaissant L et K, et tels que ϕ et θ envoient seulement le neutre sur le neutre. Soit $\pi : \Sigma^* \to P$ défini par $\forall a \in \Sigma, \pi(a) := \{(\phi(a), e_N), (e_M, \theta(a))\}$. Montrons que $\forall w \in \Sigma^*, \pi(w) := \{(\phi(u), \theta(v)) \mid w = uv\}$ par récurrence sur w.

- $\pi(\epsilon) = e_P$ par définition de morphisme, donc $\pi(\epsilon) = \{(e_M, e_N)\} = \{(\phi(u), \theta(v)) \mid \epsilon = uv\}$
- $\pi(wa) = \pi(w) * \pi(a) = \{(\phi(u), \theta(v)) \mid w = uv\} * \{(\phi(a), e_N), (e_M, \theta(a))\}$. On a
  - $\{(mm', n') \mid (m, e_N) \in \pi(w) \wedge (m', n') \in \{(\phi(a), e_N), (e_M, \theta(a))\}\} = \{(\phi(w)\phi(a), e_N), (\phi(w), \theta(a))\}$
  - $\cup\{(m, nn') \mid (m, n) \in \pi(w) \wedge (e_M, n') \in \{(\phi(a), e_N), (e_M, \theta(a))\}\} = \{(\phi(u), \theta(v)\theta(a)) \mid w = uv\}$

  $\pi(wa)$ est l'union des deux ensembles ci-dessus, donc $\pi(wa) = \{(\phi(u'), \theta(v')) \mid wa = u'v'\}$.

Clôture par concaténation (II)

Lemme

Si $L, K \subseteq \Sigma^*$ sont reconnus par monoïde fini, $L \cdot K$ aussi.

Preuve (fin) : Rappel : $\phi : \Sigma^* \to M$ et $\theta : \Sigma^* \to N$ reconnaissent L et K.
Et $\pi : \Sigma^* \to P$ est défini par $\forall a \in \Sigma, \pi(a) := \{(\phi(a), e_N), (e_M, \theta(a))\}$.
$\forall w \in \Sigma^*, \pi(w) := \{(\phi(u), \theta(v)) \mid w = uv\}$.

Montrons que $w \in L \cdot K$ ssi $\pi(w) \cap (\phi[L] \times \theta[K]) \neq \emptyset$.

- Soit $w \in L \cdot K$. Soit donc $(u, v) \in L \times K$ tel que $w = uv$. Donc $\phi(u) \in \phi[L]$ et $\theta(v) \in \theta[v]$. Ainsi $(\phi(u), \theta(v)) \in \pi(w) \cap (\phi[L] \times \theta[K])$.
- Supposons que $\pi(w) \cap (\phi[L] \times \theta[K]) \neq \emptyset$. Soient donc $u, v \in \Sigma^*$ tels que $w = uv$ et $(\phi(u), \theta(v)) \in (\phi[L] \times \theta[K])$. Donc $\phi(u) \in \phi[L]$, donc $u \in L$ car ϕ reconnaît L. De même $v \in K$. Ainsi, $w = uv \in L \cdot K$.

Montrons que π reconnaît $L \cdot K$. Soit $u, v \in \Sigma^*$ tels que $\pi(u) = \pi(v)$ et $u \in L \cdot K$. Alors $\pi(u) \cap (\phi[L] \times \theta[K]) \neq \emptyset$,donc $\pi(v) \cap (\phi[L] \times \theta[K]) \neq \emptyset$, donc $v \in L \cdot K$.

Reconnaissance par morphisme : autres propriétés de clôture

Je ne connais pas de preuves directes des propriétés ci-dessous, qui sont pourtant vraies.

- Soient $L \subseteq A^*$ reconnu par $\phi : A^* \to M$ et $\theta : A^* \to B^*$ un morphisme. Alors $\theta[L]$ est reconnu par morphisme.
- Si $L \subseteq \Sigma^*$ est reconnu par morphisme, alors L^* aussi.

Automate vers Morphisme de monoïdes

Rappel : pour tout ensemble E, le triplet $(E^E, \circ, \mathrm{id}_E)$ est un monoïde.

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ un AD. Soit δ^c une curryfication de δ^*. Plus précisément $\delta^c : \Sigma^* \to (Q \to Q)$ est telle que $\delta^c(u)(q) := \delta^*(q, u)$.

Lemme

δ^c est un morphisme de monoïdes de $(\Sigma^*, \cdot, \epsilon)$ dans $(Q^Q, \overline{\circ}, \mathrm{id}_Q)$.

Preuve

- $\forall q \in Q, \delta^c(\epsilon)(q) = \delta^*(q, \epsilon) = q$, donc $\delta^c(\epsilon) = \mathrm{id}_Q$.
- $\forall q \in Q, \delta^c(uv)(q) = \delta^*(q, uv) = \delta^*(\delta^*(q, u), v) = \delta^c(v)(\delta^c(u)(q)) = (\delta^c(u)\overline{\circ}\delta^c(v))(q)$. Donc $\delta^c(uv) = \delta^c(u)\overline{\circ}\delta^c(v)$.

Automate vers Morphisme de monoïdes (II)

Rappel : pour tout ensemble E, le triplet $(E^E, \circ, \mathrm{id}_E)$ est un monoïde.

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, i, F)$ un AD (pas nécessairement fini). Soit δ^c une curryfication de δ^*. Plus précisément $\delta^c : \Sigma^* \to (Q \to Q)$ est telle que $\delta^c(u)(q) := \delta^*(q, u)$.

Lemme

δ^c reconnaît L.

Soient $u, v \in \Sigma^*$ tels que $\delta^c(u) = \delta^c(v)$ et $u \in L$. Montrons que $v \in L$.
On a $\delta^*(i, v) = \delta^c(v)(i) = \delta^c(u)(i) = \delta^*(i, u) \in F$ car $u \in L$, donc $v \in L$.

Corollaire

Tout langage reconnu par AFD est reconnu par un monoïde fini.

Par le lemme précédent et car Q fini implique Q^Q fini.

Morphisme de monoïde vers automate

Lemme

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ et $\phi : \Sigma^* \to M$ un morphisme de monoïde reconnaissant L. Soit $\mathcal{A}_\phi := (M, \delta_\phi, \phi(\epsilon), \phi[L])$ où $\delta_\phi(x, a) := x \cdot_M \phi(a)$. Alors $\mathcal{A}_\phi$ reconnaît L.

Preuve

Soit $x \in M$. Montrons que $\forall u \in \Sigma^*, \delta_\phi^*(x, u) = x \cdot_M \phi(u)$ par récurrence sur u.

- $\delta_\phi^*(x, \epsilon) = x = x \cdot_M e_M$
- $\delta_\phi^*(x, ua) \overset{def}{=} \delta_\phi(\delta_\phi^*(x, u), a) \overset{def}{=} \delta_\phi^*(x, u) \cdot_M \phi(a) \overset{HR}{=} x \cdot_M \phi(u) \cdot_M \phi(a) = x \cdot_M \phi(ua)$

Ainsi $\delta_\phi^*(\phi(\epsilon), u) = e_M \cdot_M \phi(u) = \phi(u)$, donc u est accepté par $\mathcal{A}_\phi$ ssi $\phi(u) \in \phi[L]$ ssi $u \in \phi^{-1}[\phi[L]] = L$.

Corollaire

Tout langage reconnu par un monoïde fini est reconnu par un AFD.

Reconnaissance par automate et morphisme

Théorème

Un langage est reconnu par AFD ssi il est reconnu par un monoïde fini.

Remarque

- La traduction d'un automate vers un morphisme (par currification de la fonction de transition) augmente la taille de l'objet : les éléments du monoïde sont des fonctions des états vers les états.
- La traduction d'un morphisme vers un automate préserve la taille de l'objet : le monoïde est l'ensemble des états du nouvel automate.
- Ainsi, les deux traductions ne sont pas inverses l'une de l'autre.