

Feuille de type TD donnée en remplacement du cours d'algorithmique du 8 octobre 2026 annulé pour cause de blocage de l'ENS Paris-Saclay

Thomas Chatain

Les arbres de recherche sont des structures arborescentes dans lesquelles on organise des données (ensembles de couples (clef, valeur)), pour y accéder efficacement. Les arbres de recherche sont organisés de manière à ce que, en lisant l'arbre par un parcours en profondeur de gauche à droite, on trouve les données ordonnées par clefs croissantes. Des balises, comparables aux clefs, disposées sur les nœuds de l'arbre, permettent de s'orienter lors d'une recherche.

Tout l'enjeu avec ces arbres est de faire en sorte que les opérations élémentaires maintiennent suffisamment d'équilibre entre les sous-arbres, afin que la hauteur h de l'arbre reste en $O(\log(n))$ où n est le nombre de couples (clef, valeur) dans l'arbre. La recherche se fait ainsi en $O(\log(n))$ puisqu'elle revient essentiellement à parcourir le chemin de la racine à cette feuille en suivant les balises.

Il existe différentes versions d'arbres *binaires* de recherche. Ceux-ci feront l'objet d'un prochain TD. Ici nous nous intéressons à des arbres où le nombre de filles d'un nœud est plus libre ; cette souplesse nous permet de maintenir facilement l'équilibrage.

Arbres $a - b$

On fixe deux entiers a et b tels que $2 \leq a < b$ et $b \geq 2a - 1$, par exemple $a = 2$ et $b = 3$ ou $a = 2$ et $b = 4$). Les arbres $a - b$ sont des arbres qui vérifient les conditions suivantes.

- Toutes les feuilles sont à la même profondeur ; chaque feuille porte un couple (clef, valeur). On suppose pour simplifier que leurs clefs sont distinctes.
- Le nombre de filles d'un nœud interne x , noté $d(x)$, varie entre a et b : $a \leq d(x) \leq b$. Seule la racine peut avoir moins de a filles, mais quand même au moins 2 sauf si ce sont des feuilles (cas où l'arbre contient peu d'éléments).
- Pour un nœud interne x , on note $A_i(x)$ le i -ème sous-arbre de x . Chaque nœud x contient $d(x) - 1$ balises $k_1 < \dots < k_{d(x)-1}$, comparables aux clefs. Les clefs des feuilles de $A_i(x)$ sont inférieures ou égales à k_i pour $i = 1 \dots d(x) - 1$; et les clefs des feuilles de $A_i(x)$ sont strictement supérieures à k_{i-1} pour $i = 2 \dots d(x)$. On notera $k_i(x)$ la i -ème balise du sommet x .

Questions

1. Donner une borne sur la hauteur d'un arbre $a - b$ en fonction du nombre de feuilles.
2. Écrire un algorithme qui recherche la valeur associée à une clef dans l'arbre. Donner sa complexité.
3. Proposer une fonction qui implémente l'insertion d'un couple (clef, valeur) en temps $O(\log(n))$. Indication : utiliser une fonction récursive (auxiliaire) qui implémente l'insertion dans un sous-arbre et retourne un arbre qui vérifie les contraintes d'un arbre $a - b$, sauf potentiellement pour la racine qui peut avoir jusqu'à $b+1$ filles. Dans ce cas, le sous-arbre pourra par la suite être séparé en deux nœuds sœurs qui auront chacune $\frac{b+1}{2}$ filles.
4. Proposer une fonction qui implémente la suppression d'un élément en temps $O(\log(n))$. Cete fois on utilisera une fonction récursive (auxiliaire) qui implémente la suppression dans un sous-arbre et retourne un arbre qui vérifie les contraintes d'un arbre $a - b$, sauf potentiellement pour la racine qui peut avoir moins de a filles. Dans ce cas, le sous-arbre pourra par la suite être fusionné avec sa sœur immédiatement à gauche ou à droite, qui sera à nouveau séparé en deux sœurs si le nœud obtenu après la fusion a trop de filles.
5. Montrer comment ajouter de l'information dans l'arbre pour pouvoir
 - déterminer à tout moment, en temps constant, le nombre d'éléments dans l'arbre, la somme et la moyenne des valeurs,
 - accéder en temps $O(\log(n))$ au k -ième plus petit élément de l'arbre,
 - accéder en temps constant au plus petit élément, au plus grand élément et à l'élément médian.Toutes ces informations doivent pouvoir être mises à jour sans augmenter la complexité asymptotique de l'insertion et de la suppression.
6. Montrer comment trier efficacement un tableau ou une liste en procédant par insertions.